Задача A. Ресторан быстрого питания

Решение полным перебором

Есть семь возможных наборов блюд, поэтому самым простым решением является простой перебор всех возможных 2^7 подмножеств наборов блюд.

Также можно перебрать 7! перестановок наборов блюд и набирать наборы блюд жадно в выбранном порядке.

Жадное решение

Заметим, что решение может быть оптимальным только когда невозможно добавить в него дополнительный набор блюд.

Пусть решение таково, что в него нельзя добавить ни одного набора блюд и в нем нет какого-то набора, состоящего из одного блюда, но есть набор состоящий из двух или трёх блюд, содержащих это одно блюдо. Тогда можно заменить соответсвующий набор на набор из одного блюда, не ухудшив ответ. Это означает, что в самом начале можно жадно добавить все наборы, состоящие из одного блюда.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что любой набор из трёх блюд можно заменить на набор из двух блюд, поэтому после того как зафиксированы наборы из одного и двух блюд, достаточно просто проверить, можно ли добавить набор из трёх блюд.

Однако жадно выбирать наборы из двух блюд нельзя. Предположим, что после выбора наборов из одного блюда осталось одно блюдо первого вида, одно блюдо второго вида и два блюда третьего вида. Тогда можно выбрать два набора блюд, однако если взять в самом начале набор из блюд первого и второго видов, набрать два разных набора не получится.

В данном случае можно просто перебрать порядок выбора наборов из двух блюд или заметить что все такие тесты имеют вид $2\,2\,x$, $2\,x\,2$, $x\,2\,2$, при условии $x \geqslant 3$, и разобрать их отдельно.

Задача B. Неклассические классики

Заметим, что нам всегда нужно ровно $2{\cdot}k{+}2$ горизонтальных отрезков (это в точности количество строк $+1$).

С вертикальными отрезками все немного сложнее. Мы можем использовать $k \cdot (a+1) + k \cdot (b+1) + (n+1)$ отрезков, просто обведя боковые стороны каждого квадрата. К сожалению, это число не всегда минимально. Почему? Потому что иногда некоторые боковые стороны квадратов одного ряда как бы «продолжают» боковые стороны квадратов соседнего ряда. В таком случае можно два отрезка заменить на один отрезок вдвое большей длины.

Заметим, что такое не происходит, когда два соседних ряда имеют разную четность. А когда они имеют одинаковую четность, все вертикальные отрезки меньшего ряда соединены с отрезками большего ряда.

Тогда будем рисовать наше поле от первого ряда к последнему. Если мы только что нарисовали i-й ряд, в котором было a клеток, а теперь хотим нарисовать следующий ряд, в котором b клеток, то бывает три случая:

1. Четности a и b разные. Тогда нам придется поставить b + 1 отрезок.
2. Четности a и b совпали, при этом $b \leqslant a$. Тогда мы можем вообще не создавать новые отрезки, а просто продлить старые на один ряд.
3. Четности a и b совпали, но $b > a$. Тогда нам понадобится провести $b - a$ новых отрезков, а оставшиеся мы можем продлить.

Таким образом, можно посчитать стоимость каждого следующего ряда. А именно, если ввести прошлую функцию как $f(a,b)$, то нам понадобится $a + 1 + f(a,b) \cdot k + f(b,a) \cdot (k-1) + f(b,n)$ вертикальных отрезков. Так мы получили решение сложностью $O(1)$.

Задача C. Альтернативные правила

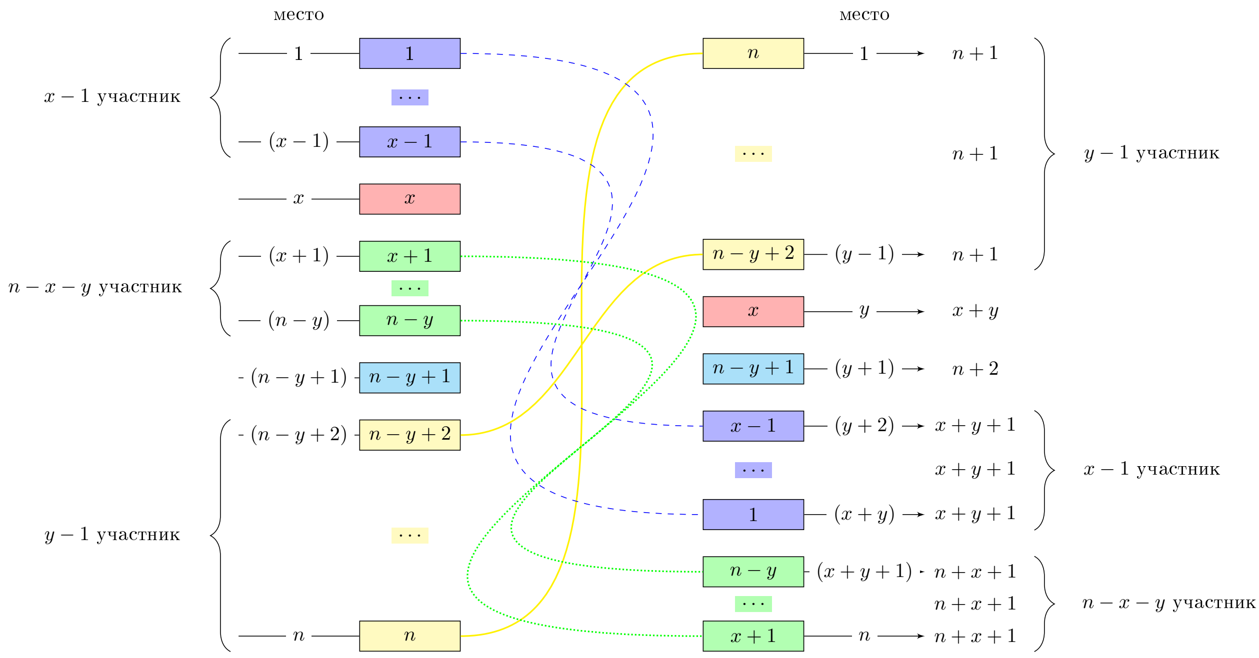
Не умаляя общности предположим, что $x \leqslant y$. Для удобства занумеруем участников от 1 до n в том порядке, какие места они заняли в первом туре. Таким образом интересующий нас участник – это участник x.

Докажем формулу: $\mathrm{MIN\_PLACE} = \max(1, \min(n, x + y - n + 1))$

1. Первый случай: $x + y < n$. Покажем как можно добиться первого места в олимпиаде. Для этого построим следующий пример:

   - i-й участник ($1 \leqslant i \leqslant x - 1$) занимает $(x + y + 1 - i)$-е место во втором туре (сумма — $x + y + 1$)
   - x-й участник занимает y-е место во втором туре (сумма — $x + y$)
   - j-й участник ($x + 1 \leqslant j \leqslant n - y$) занимает $(n + x + 1 - j)$-е место во втором туре (сумма — $n + x + 1$)
   - $(n - y + 1)$-й участник занимает $(y + 1)$-е место во втором туре (сумма — $n + 2$)
   - t-й участник ($n - y + 2 \leqslant t \leqslant n$) занимает $(n + 1 - t)$-е место во втором туре (сумма — $n + 1$)

   Иллюстрация ниже поясняет данный пример

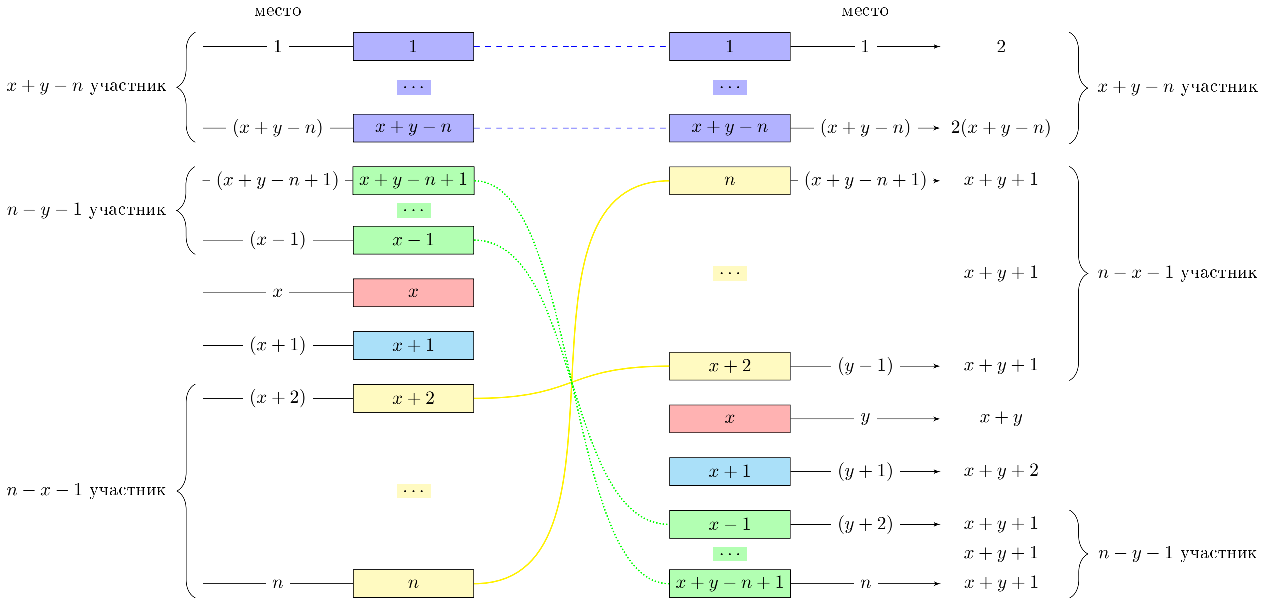


2. Второй случай: $x + y \geqslant n + 1$; $y \neq n$

   Тогда участник с номером k ($k \leqslant x + y - n < x$) получит не более чем $x + y - n + n = x + y$ в сумме, то есть гарантированно обгонит главного героя. То есть, мы не можем занять места лучше, чем $x + y - n + 1$. Для такой оценки ниже приведём пример:

   - i-й участник ($1 \leqslant i \leqslant x + y - n$) занимает i-е место во втором туре (сумма — $2i < x + y$)
   - j-й участник ($x + y - n + 1 \leqslant j \leqslant x - 1$) занимает $(x + y + 1 - j)$-е место во втором туре (сумма — $x + y + 1$)
   - x-й участник занимает y-е место во втором туре (сумма — $x + y$)
   - $(x + 1)$-й участник занимает $(y + 1)$-е место во втором туре (сумма — $x + y + 2$)
   - t-й участник ($x + 2 \leqslant t \leqslant n$) занимает $(x + y + 1 - t)$-е место во втором туре (сумма — $x + y + 1$)

   Иллюстрация ниже поясняет данный пример



3. Третий случай: $x+y \geqslant n+1$; $y=n$

   Тогда участник с номером k ($k \leqslant x+y-n+1 = x+1$) получит не более чем $x+y-n+1+n-1 = x+y$ в сумме, то есть гарантированно обгонит главного героя. То есть, мы не можем занять места лучше, чем $x+y-n+1$. Для такой оценки ниже приведём пример:

   - Участник $i < x$ занимает x-е место, обгоняя $x+y$
   - Участник $x+1$ занимает $(n-1)$-е место, обгоняя $x+y$
   - Участник j ($x+2 \leqslant j \leqslant n$) занимает $(x+y+1-j)$-е место

   Отдельный случай: x = y = n, тогда исход очевиден

Формула для минимального места доказана. Докажем аналогично формулу для максимального места:

Докажем формулу: $\text{MAX\_PLACE} = \min(n, x+y-1)$

1. Первый случай: $x+y \geqslant n+1$. Тогда можно привести такой пример, при котором мы займём последнее место:

   - i-й участник ($1 \leqslant i \leqslant x+y-n-1$) занимает $(y+x-n-i)$-е место во втором туре (сумма — $y+x-n$)
   - j-й участник ($x+y-n-1 \leqslant j \leqslant n$) занимает $(x+y-j)$-е место во втором туре (сумма — $y+x$)

2. Второй случай: $x+y \leqslant n$ Пусть участник с номером k ($x+y \leqslant k$) во втором туре займёт не менее чем $1+x+y > x+y$, то есть всё равно не обгонит $x+y$ Значит, герой займёт в худшем случае не более чем $x+y-1$ место:

   - i-й участник ($1 \leqslant i \leqslant x+y-1$) занимает $(y+x-i)$-е место во втором туре (сумма — $y+x-n$)
   - j-й участник ($x+y-1 \leqslant j \leqslant n$) занимает $(x+y+n-j)$-е место во втором туре (сумма — $y+x$)

Таким образом, задача свелась к задаче вывод двух чисел – $\langle \max(1, \min(n, x+y-n+1)),\ \min(n, x+y-1) \rangle$

Задача D. Деление

Возможно несколько случаев, которые надо учесть в этой задаче.

1. $m > b^k$, то есть какое-бы число не загадала Маша, оно меньше m. Тогда если $n > 1$, то надо спросить про 0 позиций, так как загаданное число больше 0 и меньше m, значит точно не делится на m. Если $n = 1$, то надо спросить про 1 позицию, так как число может быть равно 0 и делится, или равно 1 и не делится.

2. Не 1 случай и существует такое целое $k < n$, что b^k делится на m. Тогда про все позиции после k-й с конца спрашивать нет смысла, а про последние k надо узнать (так как если последние k цифр равны 0, то в этом случае число точно делится, а если хотя-бы одна из них равна 1, то деления уже не будет, значит чтобы определить случай последних k цифр 0 надо про все k последних цифр спросить).

3. Не 1 случай, не 2 случай, $b = 2$ и $n > 1$. В этом случае про первую цифру мы знаем что она не 0, значит она равна 1. Про остальные цифры мы не знаем чему они равны, и изменение любой цифры из числа, делящегося на m сделает число, не делящееся на m, значит чтобы убедится, что число делится на m, надо спросить про все цифры кроме 1.

4. Все остальные случаи. Про все цифры мы не знаем чему они равны, и изменение любой цифры из числа, делящегося на m сделает число, не делящееся на m, значит чтобы убедится, что число делится на m, надо спросить про все цифры.

Задача E. Небоскрёбы

Пусть мы решаем задачу на каком-то массиве m длины n. Найдем в этом массиве минимальный элемент. Пусть он находится на позиции i ($1 \leqslant i \leqslant n$). Мы можем сделать небоскрёб на участке i максимально высоким, присваивая $a_i = m_i$.

Теперь нам необходимо сделать выбор — нам нужно приравнять к a_i либо левую часть массива ($a_1 = a_i, a_2 = a_i, \ldots, a_{i-1} = a_i$), либо правую часть массива ($a_{i+1} = a_i, a_{i+2} = a_i, \ldots, a_n = a_i$), и решать рекурсивно задачу для оставшейся части массива, пока не придем к массиву единичной длины.

Вышеописанная рекурсивная задача имеет всего n различных состояний. В зависимости от метода поиска минимального элемента на отрезке можно получить решение сложности $O(n^2)$, $O(n\sqrt{n})$ или $O(n \log n)$.

Есть и другое решение. Можно доказать, что все ответы выглядят следующим образом: с начала массива высота небоскрёбов неубывает, затем начиная с какого-то небоскрёба высота невозрастает. Назовем «вершиной» небоскрёб, на котором происходит смена направления роста величины небоскрёбов.

Можно сделать два прохода. Построим два массива l и r длины n. В первом проходе мы идем слева направо. Пусть мы сейчас на позиции i. Если m_i — наименьший элемент среди $m_1, \ldots, m_i$, тогда $l_i = i \times m_i$. Иначе, возьмем среди чисел $m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}$ самое правое число, меньшее m_i. Пусть позиция этого числа j, тогда $l_i = l_j + (i-j) \times m_i$. Аналогично построим массив r. «Вершиной» является такой небоскрёб t, что значение $l_t + r_t - m_t$ максимально.

Сложность этого решения может быть $O(n^2)$, $O(n \log n)$, $O(n)$ в зависимости от способа поиска «ближайших» чисел слева и справа, меньших текущего.