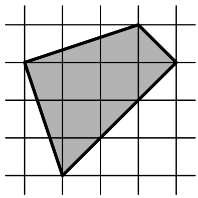
6 класс

Задача 1. Саша выписала числа от одного до ста, а Миша часть из них стёр. Среди оставшихся у 20 чисел есть в записи единица, у 19 чисел есть в записи двойка, а у 30 чисел нет ни единицы, ни двойки. Сколько чисел стёр Миша? **[*4 балла*]** (*А. В. Шаповалов*)

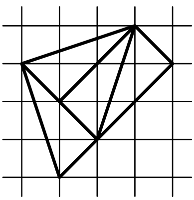
Ответ. 33.

Решение. Среди чисел от 1 до 100 единицу в записи содержит ровно двадцать: это сама единица, десять чисел от 10 до 19, числа 21, 31, ..., 91 (их восемь) и число 100. Значит, ни одно из этих чисел не было стёрто. Аналогично, чисел с двойкой ровно девятнадцать: сама двойка, десять чисел третьего десятка, а также 12, 32, 42, ..., 92 (таких восемь). То есть и из них Миша ни одно не стёр. Всего таких чисел $19 + 20 - 2 = 37$ (мы вычитаем 2, поскольку числа 12 и 21 посчитаны два раза). Всего осталось $37 + 30 = 67$ чисел, а Миша стёр $100 - 67 = 33$ числа.

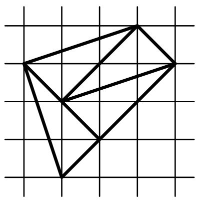
Задача 2. Разрежьте фигуру, показанную на рисунке, на четыре одинаковые части. **[*5 баллов*]** (*М. А. Волчкевич*)



Решение. См. рисунок.



или



Комментарий. Решение задачи может стать нагляднее, если вместо обычной сетки с горизонтальными и вертикальными линиями рассмотреть диагональную, изображённую на рис. 1 на следующей странице пунктирными линиями. На диагональной сетке наша фигура имеет площадь 4 клетки, и её надо разрезать на 4 фигуры площади 1. Аналогичная фигура на обычной сетке изображена на рис. 2, её разрезание там проще увидеть, а потом его можно перенести на исходную фигуру.

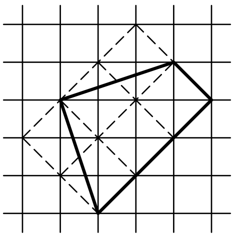


Рис. 1

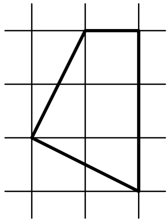


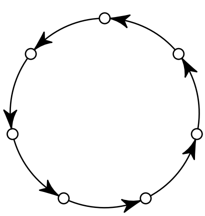
Рис. 2

Задача 3. Сеня не умеет писать некоторые буквы и всегда в них ошибается. В слове ТЕТРАЭДР он сделал бы пять ошибок, в слове ДОДЕКАЭДР — шесть, а в слове ИКОСАЭДР — семь. А сколько ошибок он сделает в слове ОКТАЭДР? **[*6 баллов*]** (*Е. В. Бакаев*)

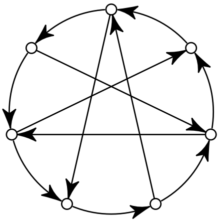
Ответ. 5.

Решение. Если Сеня с ошибкой пишет Д, то из букв О, Е, К, А, Э, Р, которые ещё входят в ДОДЕКАЭДР, он в трёх ошибается, а три пишет верно. Но все эти буквы, кроме Е, входят и в ИКОСАЭДР, то есть там он напишет верно как минимум две буквы и никак не сможет сделать 7 ошибок. Значит, букву Д Сеня пишет правильно. Тогда он неминуемо пишет с ошибкой все остальные буквы слов ДОДЕКАЭДР и ИКОСАЭДР, а в слове ТЕТРАЭДР, таким образом, помимо Д, ещё верно пишет букву Т, но ошибается во всех остальных. Теперь ясно, что в слове ОКТАЭДР Сеня сделает пять ошибок.

Задача 4. Семь городов соединены по кругу семью односторонними авиарейсами (см. рисунок). Назначьте (нарисуйте стрелочками) ещё несколько односторонних рейсов так, чтобы от любого города до любого другого можно было бы добраться, сделав не более двух пересадок. Постарайтесь сделать число дополнительных рейсов как можно меньше. **[*не более 6 баллов*]** (*В. А. Клепцын*)



Решение. Пример с пятью дополнительными рейсами см. на рисунке. Можно доказать, что добавить меньшее число рейсов невозможно.



Задача 5. Вокруг круглого озера через равные промежутки растут 2019 деревьев: 1009 сосен и 1010 ёлок. Докажите, что обязательно найдется дерево, рядом с которым растёт сосна и с другой стороны от которого через одно дерево тоже растёт сосна. [*8 баллов*] (*Е. В. Бакаев*)

Решение. Обойдём озеро по кругу и напишем на деревьях буквы: А, Б, В, затем снова А, Б, В и так далее. Деревьев с каждой буквой будет по $2019 : 3 = 673$. Если бы сосен с каждой буквой было бы не более чем 336, то их всего было бы не более чем $336 \cdot 3 = 1008$. А так как их 1009, то сосен с какой-то буквой (скажем, А) будет хотя бы 337. (Такое рассуждение часто встречается в решениях математических задач и называется принципом Дирихле.) Рассмотрим теперь только деревья с буквой А. Если какие-то две сосны стоят подряд, то задача решена — дерево с буквой В между ними удовлетворяет условиям. Если же между каждыми соседними соснами с буквой А растёт хотя бы по одной ёлке, то деревьев с буквой А будет не менее чем $337 \cdot 2 = 674$, а это не так.

Задача 6. Каждая грань куба $6 \times 6 \times 6$ разбита на клетки 1×1. Куб оклеили квадратами 2×2 так, что каждый квадрат накрывает ровно четыре клетки, никакие квадраты не совпадают и каждая клетка накрыта одинаковым числом квадратов. Какое наибольшее значение может принимать это одинаковое число? (Квадрат можно перегибать через ребро.) [*8 баллов*] (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. 3.

Решение. Оценка. Клетку в углу грани можно накрыть тремя способами (целиком в грани, с перегибом через одно ребро угла, с перегибом через другое ребро угла). Значит, каждая клетка накрыта не более чем тремя квадратами.

Пример. Рассмотрим обычное покрытие куба квадратами, когда каждая грань покрыта девятью квадратами. Из обычного покрытия можно получить повёрнутое: оставим нетронутыми две противоположные грани, а на остальных четырёх гранях сдвинем все квадраты по кольцу на одну клетку. Так как пару противоположных граней можно выбрать тремя способами, то повёрнутых покрытий получится ровно три. Покажем, что не совпадают никакие два квадрата на покрытиях, повёрнутых по-разному.

Действительно, рассмотрим одну грань. На рисунке отмечены центры покрывающих её квадратов: крестиками, если эта грань не сдвигалась, чёрными и белыми точками — если сдвигалась в одном или другом направлении. Видно, что никакие центры, а значит и никакие квадраты не совпали.