11 класс, второй день

1. *Ответ.* 26.

Решение. Число 11^k является n-значным, если $10^{n-1} < 11^k < 10^n$, т. е. $n-1 < k\lg 11 < n$. Значит, $n = [k\lg 11] + 1$. Если $k \leqslant 24$, то $k\lg 11 < k+1$ (и значит, $n = k+1$), так как $k(\lg 11 - 1) \leqslant 24 \cdot 0{,}0415 = 0{,}996 < 1$. Если $k \geqslant 25$, то $k\lg 11 > k+1$ (и значит, $n \geqslant k+2$), так как $k(\lg 11 - 1) \geqslant 0{,}041 \cdot 25 = 1{,}025 > 1$.

Комментарий. Можно показать, что натуральные степени числа 11 не бывают n-значными числами для $n=\left[k\frac{\lg 11}{\lg 11-1}\right]+1$, $k\in\mathbb{N}$, т. е. при $n=26, 51, 76, 101, 126, \ldots$

Последовательность вида $[\alpha n]$, где $\alpha>0$ иррациональное, называется *последовательностью Битти* в честь американского математика С. Битти, предложившего в 1926 г. такую задачу: доказать, что если $\alpha, \beta>1$ иррациональны и $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$, то каждое натуральное число принадлежит ровно одной из последовательностей $[\alpha n]$, $[\beta n]$, $n\in\mathbb{N}$ (назовем их *сопряженными*). Последовательности значений n, для которых степени числа 11 есть среди $(n+1)$-значных чисел и для которых их нет, суть сопряженные последовательности Битти $[k\lg 11]$ и $\left[k\frac{\lg 11}{\lg 11-1}\right]$, $k\in\mathbb{N}$, соответственно ($\alpha=\lg 11=1{,}0413\ldots$, $\beta=\frac{\lg 11}{\lg 11-1}=25{,}1588\ldots$).

2. *Решение.* По смыслу задачи достаточно рассмотреть случай $a>0$. Если $n<a\leqslant n+1$, $n\in\mathbb{N}$, число точек в первой координатной четверти ($x>0$, $y>0$) под графиком функции $y=a/x$ равно

$$S(a)=n+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\ldots$$

(сумма конечная, так как с того момента, как знаменатель окажется больше числителя, целая часть станет равна нулю). Функция $S(a)$ является неубывающей, постоянной на каждом полуинтервале $(n;\, n+1]$, $n\in\mathbb{N}$,

$$S(a)=23+11+7+5+4+3+3+4\cdot 2+13\cdot 1=77 \quad \text{при } 23<a\leqslant 24,$$

$$S(a)=24+12+8+6+4+4+3+3+4\cdot 2+12\cdot 1=84 \quad \text{при } 24<a\leqslant 25.$$

Таким образом, функция $S(a)$ значения 82 не принимает.

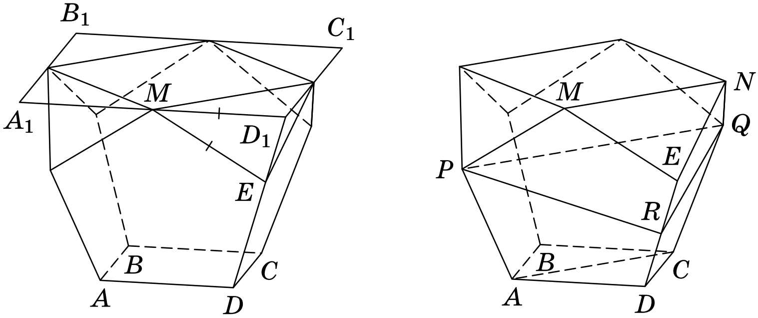
Комментарий. Задача об асимптотическом поведении при больших a числа точек первой координатной четверти ($x>0$, $y>0$) с целочисленными координатами под графиком функции $y=a/x$ называется *проблемой делителей Дирихле*. Если обозначить количество натуральных делителей числа n через $\tau(n)$ (например, $\tau(1)=1$, $\tau(3)=2$, $\tau(10)=4$), то это число точек равно

$$D(a)=\tau(1)+\tau(2)+\tau(3)+\ldots+\tau([a]).$$

(здесь в сумму включено также число точек на самой гиперболе, если $a \in \mathbb{Z}$). С ростом a сумма $D(a)$ растет примерно как $\int_1^a \frac{a}{x}\,dx = a \ln a$ (скажем, $D(23) = 77$, а $23 \ln 23 = 72{,}116\ldots$). Первый из известных существенных результатов в этой области получил в середине XIX века Дирихле. Отметим, что задача уточнения остаточного члена в асимптотической формуле для $D(a)$ актуальна и в наши дни.

3. *Ответ.* В $\sqrt{2}$ раз.

Первое решение. Пусть $ABCD$ — нижний квадрат. Примем его сторону за 1 и найдем сторону верхнего квадрата. Проведем через вершины верхнего квадрата прямые, параллельные соответствующим сторонам нижнего, получим квадрат $A_1B_1C_1D_1$ (см. рис. слева).



Прямая DD_1 лежит в пересечении плоскостей пятиугольников со сторонами AD и CD, поэтому их общая вершина E, отличная от D, лежит на отрезке DD_1. Пусть M — вершина пятиугольника со стороной AD, противолежащая этой стороне. Тогда в силу симметрии M — середина A_1D_1. Следовательно,

$$AD = DE = EM = MD_1 = 1,$$

так как треугольник MD_1E равнобедренный (поскольку $\angle MED_1 = \angle MD_1E = 72^\circ$). Таким образом, $A_1D_1 = 2$, а искомая сторона верхнего квадрата равна $\sqrt{2}$.

Второе решение. Обозначим через $ADEMP$ и $CDENQ$ соседние пятиугольные грани с общим ребром DE (см. рис. справа). Пусть R — середина ребра DE. Точки A и M симметричны относительно прямой PR, перпендикулярной ED, а точки C и N симметричны относительно прямой QR, также перпендикулярной ED. Следовательно, треугольники ADC и MEN симметричны относительно плоскости PQR и поэтому равны. Отсюда находим

$$MN : AD = AC : AD = \sqrt{2}.$$

Комментарий. Задача была придумана в ходе игры с детьми в геометрический конструктор, одним из создателей которого является профессор механико-математического факультета МГУ И. Х. Сабитов.

4. *Первое решение.* Левая часть $f(x)$ в этом уравнении представляет собой многочлен степени $n-1$, так как коэффициент при x^{n-1} равен $a_1 + \ldots + a_n \neq 0$. Если n четно, то получаем многочлен нечетной степени, он всегда имеет действительный корень, так как функция $f(x)$ непрерывна и $f(x_0) > 0$, $f(-x_0) < 0$ при достаточно большом $x_0 > 0$.

Пусть n нечетно. Можно считать, что все числа $a_1, \ldots, a_n$ различны (в противном случае число $a = a_i = a_j$, где $i \neq j$, является корнем), не равны нулю (если $a_i = 0$ при некотором i, то и $f(a_i) = 0$) и упорядочены по возрастанию: $a_1 < a_2 < \ldots$ $\ldots < a_n$. Заметим, что

$$f(a_k) = a_k(a_k - a_2)\ldots(a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})\ldots(a_k - a_n)$$

имеет тот же знак, что и $a_k \cdot (-1)^{n-k} = (-1)^{k-1}a_k$. Но при $n \geqslant 3$ среди чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ есть хотя бы одна пара соседних, имеющих одинаковый знак. Тогда значения в этих точках разного знака, поэтому между ними есть корень многочлена $f(x)$.

Второе решение. Положим

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$$

и

$$f(x) = a_1(x - a_2)\ldots(x - a_n) + a_2(x - a_1)(x - a_3)\ldots(x - a_n) + \\ + \ldots + a_n(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1}).$$

Если среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ есть хотя бы одно нулевое, то $f(0) = 0$ и утверждение задачи доказано. Пусть теперь среди этих чисел нет нулевых. Тогда $f(0) \neq 0$, $f(x) = xP'(x) -$

$-nP(x)$ и $\left(\frac{P(x)}{x^n}\right)' = \frac{xP'(x)-nP(x)}{x^{n+1}} = \frac{f(x)}{x^{n+1}}$. Значит, $f(x)=0$ тогда и только тогда, когда $\left(\frac{P(x)}{x^n}\right)'=0$.

Имеем

$$\frac{P(x)}{x^n} = \left(1-\frac{a_1}{x}\right)\left(1-\frac{a_2}{x}\right)\ldots\left(1-\frac{a_n}{x}\right) = (-1)^n a_1a_2\ldots a_n\, Q\left(\frac{1}{x}\right),$$

где $Q(t) = \left(t-\frac{1}{a_1}\right)\left(t-\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(t-\frac{1}{a_n}\right)$. Следовательно,

$$\left(\frac{P(x)}{x^n}\right)' = \frac{(-1)^{n+1}a_1a_2\ldots a_n}{x^2}\, Q'\left(\frac{1}{x}\right),$$

и $f(x)=0$ тогда и только тогда, когда $Q'\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

Если $a_1=a_2$, то $f(a_1)=0$ и утверждение задачи доказано. Иначе $Q\left(\frac{1}{a_1}\right)=Q\left(\frac{1}{a_2}\right)=0$ и, следовательно, между $\frac{1}{a_1}$ и $\frac{1}{a_2}$ лежит корень производной многочлена $Q(t)$ (так как на интервале $\left(\frac{1}{a_1};\ \frac{1}{a_2}\right)$ найдется либо точка минимума, либо точка максимума $Q(t)$). Значит, уравнение $Q'(t)=0$ имеет действительный корень t_0. Поскольку

$$Q'(0) = (-1)^{n+1}\,\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{a_1a_2\ldots a_n} \neq 0,$$

имеем $t_0\neq 0$. Следовательно, уравнение $f(x)=0$ имеет действительный корень $\frac{1}{t_0}$. Что и требовалось доказать.

5. *Ответ.* $\frac{1053}{2^{21}}$.

Первое решение. Пусть m_n — наименьшее число, которое можно получить из n единиц после $n-1$ операций. Заметим, что

$$m_n = \min_{\substack{p+q=n,\\ p,q\in\mathbb{N}}} \frac{m_p+m_q}{4}$$

при всех $n\geqslant 2$. Действительно, как бы мы ни получили наименьшее число m_n, оно равно $\frac{x+y}{4}$, где числа x и y были получены на предыдущем шаге. Пусть x получено из p единиц исходного набора, а y — из оставшихся $n-p=q$ единиц. Если $x>m_p$ или $y>m_q$ (предположим для определенности, что $x>m_p$), то из исходного набора p единиц можно было бы получить меньшее число, не затрагивая второй набор.

Значит, на последнем шаге можно получить число, меньшее m_n, что противоречит определению m_n.

Докажем индукцией по n, что $m_n = f(n)$, где $f(n) = \frac{3 \cdot 2^k - n}{2^{2k+1}}$, а $k = k(n)$ определяется из условия $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$ (т. е. $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$). При $n = 1, 2, 3$ это равенство проверяется непосредственно:

$$m_1 = 1 = \frac{3 \cdot 1 - 1}{2^1}, \quad m_2 = \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2 - 2}{2^3}, \quad m_3 = \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 2 - 3}{2^3}.$$

Предположим, что оно верно для всех $n \leqslant n_0$, где $n_0 \geqslant 3$, и докажем его для $n = n_0 + 1$.

Лемма. Наименьшее значение выражения $f(p) + f(q)$ при условии $p + q = n$ достигается при $p = \lfloor n/2 \rfloor$, $q = \lceil n/2 \rceil$, где обозначено $\lfloor x \rfloor = [x]$, $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, не меньшее x.

Доказательство. Обозначим $d(n) = f(n) - f(n+1)$. Пользуясь формулой для $f(n)$, получаем $d(n) = 2^{-2k-1}$, где $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$ (это проверяется непосредственно как в случае $n < 2^{k+1} - 1$, так и при $n = 2^{k+1} - 1$). Из полученной формулы для $d(n)$ следует, что $d(n) \geqslant d(n+1)$, поэтому $d(p) \geqslant d(q)$ при $p \leqslant q$.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant q < n$ и $p + q = n$. Сравним значения $f(p) + f(q)$ и $f(p+1) + f(q-1)$. Их разность равна

$$f(p) + f(q) - f(p+1) - f(q-1) = d(p) - d(q-1).$$

Если $p < q$, то $d(p) \geqslant d(q-1)$, а значит, $f(p) + f(q) \geqslant f(p+1) + f(q-1)$. Итак, если p пробегает значения от 1 до $\lfloor n/2 \rfloor$ (т. е. не превосходит q), то сумма $f(p) + f(q)$ не возрастает, а значит, ее наименьшее значение достигается при $p = \lfloor n/2 \rfloor$ (соответственно, $q = \lceil n/2 \rceil$). Лемма доказана.

Из доказанной леммы и предположения индукции следует, что

$$m_n = \frac{m_{\lfloor n/2 \rfloor} + m_{\lceil n/2 \rceil}}{4} = \frac{f(\lfloor n/2 \rfloor) + f(\lceil n/2 \rceil)}{4}.$$

Остается убедиться, что

$$\frac{f(\lfloor n/2 \rfloor) + f(\lceil n/2 \rceil)}{4} = f(n).$$

Пусть k таково, что $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. Тогда $2^{k-1} \leqslant \lfloor n/2 \rfloor < 2^k$. Если $n < 2^{k+1} - 1$, то $2^{k-1} \leqslant \lceil n/2 \rceil < 2^k$, и $f(\lceil n/2 \rceil) = \frac{3 \cdot 2^{k-1} - \lceil n/2 \rceil}{2^{2k-1}}$.

Если же $n = 2^{k+1} - 1$, то $\lceil n/2 \rceil = 2^k$, и

$$f(\lceil n/2 \rceil) = \frac{3 \cdot 2^k - 2^k}{2^{2k+1}} = 2^{-k} = \frac{3 \cdot 2^{k-1} - 2^k}{2^{2k-1}} = \frac{3 \cdot 2^{k-1} - \lceil n/2 \rceil}{2^{2k-1}},$$

т. е. в обоих случаях имеем

$$f(\lceil n/2 \rceil) = \frac{3 \cdot 2^{k-1} - \lceil n/2 \rceil}{2^{2k-1}}.$$

Следовательно,

$$m_n = \frac{f(\lfloor n/2 \rfloor) + f(\lceil n/2 \rceil)}{4} = \frac{3 \cdot 2^k - n}{2^{2k+1}} = f(n).$$

При $n = 2019$ получаем $k = 10$, $m_{2019} = \dfrac{3072 - 2019}{2^{21}} = \dfrac{1053}{2^{21}}$.

Второе решение. Пусть x — число, получившееся после 2018 операций. Проследим, как было получено это число. Для этого «развернем» все операции в обратном направлении. При прямом применении операции два числа заменялись одним, поэтому при обратном каждое число мы будем заменять на два числа, из которых оно было получено (сохраняя деление на 4):

$$\frac{a+b}{4} \to \frac{a}{4} + \frac{b}{4}.$$

При этом есть числа, у которых нет предшественников — это единицы. Каждую единицу мы искусственно представим в виде суммы двух чисел:

$$\frac{a+1}{4} \to \frac{1}{4} + \frac{a}{4} = \frac{2}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{a}{4}$$

(если $a = 1$, то с этой единицей мы проделаем ту же процедуру). Далее каждую степень двойки, стоящую в числителе и полученную когда-то из единицы, мы снова искусственно превращаем в сумму двух чисел:

$$\frac{2^l}{4^m} = \frac{4 \cdot 2^l}{4^{m+1}} = \frac{2^{l+1} + 2^{l+1}}{4^{m+1}} = \frac{2^{l+1}}{4^{m+1}} + \frac{2^{l+1}}{4^{m+1}}.$$

Таким образом, при каждом таком «разворачивании» операции в обратном направлении количество чисел удваивается. Поэтому в итоге мы получим представление числа x в виде дроби, в числителе которой стоит сумма 2048 чисел ($2^{10} < 2019 < 2^{11} = 2048$), каждое из которых есть некоторая степень двойки, а знаменатель равен 4^{11}.

Обозначим через a_k количество слагаемых вида 2^k, $k = 0, 1, \ldots$, в числителе дроби, представляющей число x.

С учетом искусственного раздвоения единиц и чисел, получающихся из них, исходное количество единиц равно

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \ldots$$

Получаем следующую систему условий, равносильную исходной задаче:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \ldots}{4^{11}} \to \min, \\ a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{4} + \ldots = 2019, \\ a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = 2048. \end{cases}$$

Чтобы сделать число x наименьшим, необходимо обнулить как можно больше чисел a_k с большими коэффициентами (или, что то же самое, с большими номерами k). Для 2019 единиц достаточно положить $a_2 = a_3 = \ldots = 0$. Решением системы

$$\begin{cases} a_0 + \dfrac{a_1}{2} = 2019, \\ a_0 + a_1 = 2048 \end{cases}$$

будут числа $a_0 = 1990$, $a_1 = 58$. Тогда

$$x = \frac{1990 + 116}{4^{11}} = \frac{2106}{2^{22}} = \frac{1053}{2^{21}}.$$

Заметим, что если изначально на доске было написано количество единиц, равное степени двойки, то можно положить $a_1 = a_2 = \ldots = 0$, т. е. в этом случае можно взять отличным от нуля только a_0.