10 класс

1. *Ответ.* Например, 900 900 000.

Примечание. На самом деле существует 28 573 числа, удовлетворяющих условиям задачи, наименьшее из которых равно 100 006 020, а наибольшее 999 993 240.

2. См. решение задачи 3 для 9 класса.

3. См. решение задачи 4 для 8 класса.

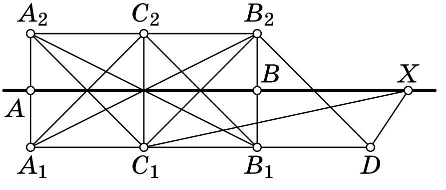
4. *Ответ.* Да.

Первое решение. Предположим, что такого треугольника не существует, и докажем, что существует прямая, все точки которой имеют один цвет.

Пусть на некоторой прямой l есть две точки A, B одного цвета (обозначим этот цвет 1), расстояние между которыми равно d. Пусть l_1, l_2 — две прямые, параллельные l и удаленные от нее на расстояние $2/d$. Если на какой-нибудь из этих прямых есть точка цвета 1, то она образует с точками A, B треугольник площади 1, все вершины которого имеют одинаковый цвет. Если на каждой из прямых l_1, l_2 присутствуют два цвета и на одной из них найдутся две точки одного цвета на расстоянии $d/2$, то они вместе с точкой такого же цвета на другой прямой образуют треугольник площади 1, все вершины которого имеют одинаковый цвет. Если же на каждой из прямых l_1, l_2 присутствуют два цвета и любые две точки на расстоянии $d/2$ разных цветов, то любые две точки на расстоянии d будут одного цвета, а значит, на прямой AB все точки имеют цвет 1.

Пусть теперь все точки некоторой прямой a покрашены в цвет 1. Тогда остальные точки плоскости покрашены в два оставшихся цвета. Возьмем прямую, не параллельную a, и две точки C, D на ней одного цвета (обозначим этот цвет 2). Если на какой-нибудь из двух прямых, параллельных CD и удаленных от нее на расстояние $2/CD$, найдется точка цвета 2, то C, D и эта точка образует треугольник площади 1, все вершины которого имеют одинаковый цвет. Если же таких точек нет, то найдется треугольник площади 1 с вершинами цвета 3.

Второе решение.[1] Пусть не все точки плоскости раскрашены в один цвет. Тогда на некоторой прямой присутствуют точки разных цветов: точки A и B цвета 1 и точка X цвета 2. Пусть $A_1B_1B_2A_2$ — прямоугольник, в котором A, B — середины сторон A_1A_2, B_1B_2 соответственно, длины этих сторон равны $4/AB$, C_1, C_2 — середины A_1B_1 и A_2B_2 соответственно, D — точка, симметричная C_1 относительно B_1.



Если среди точек $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ есть точка цвета 1, она образует искомый треугольник с точками A, B.

Если среди точек $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ нет точек цвета 1, то возможны следующие случаи.

1) Точки A_1 и B_1 (рассуждение для точек A_2 и B_2 аналогично) разного цвета. Тогда цвет C_1 совпадает с цветом одной из них, например, A_1. Если какая-то из точек A_2, C_2 того же цвета, эти три точки образуют искомый треугольник. В противном случае искомым будет треугольник $A_2C_2B_1$.

2) Если одна из пар A_1, B_1 или A_2, B_2 цвета 2, она образует искомый треугольник с точкой X.

---

[1]Это решение основано на работе Александра Власова.

3) Если все точки A_1, B_1, A_2, B_2 цвета 3 и одна из точек C_1, D тоже цвета 3, то треугольник $B_1C_1B_2$ или B_1DB_2 искомый. В противном случае треугольник C_1DX искомый.

5. *Ответ.* Да.

Решение. Покажем, как может действовать Вася, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети.

Предположим, что Петя не взял карточку, на которой написано $x_6x_7x_8x_9x_{10}$. Тогда Вася может взять эту карточку, а дальше брать любые карточки. При

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, \quad x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 1$$

сумма произведений у Пети будет равна 0, а у Васи будет равна 1.

Если Петя сразу же взял карточку, на которой написано $x_6x_7x_8x_9x_{10}$, то Вася может взять карточку, на которой написано $x_5x_7x_8x_9x_{10}$, а следующим ходом одну из карточек $x_4x_7x_8x_9x_{10}$ или $x_5x_6x_8x_9x_{10}$ (хотя бы одна из них останется, поскольку за ход Петя может взять только одну из этих двух карточек). Далее Вася может брать карточки как угодно.

В случае, если Вася взял карточку $x_4x_7x_8x_9x_{10}$, он может присвоить переменным следующие значения:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = x_5 = x_6 = 1, \quad x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 100.$$

Тогда только на 21 карточке окажется ненулевое произведение, причем для трех карточек $x_4x_7x_8x_9x_{10}$, $x_5x_7x_8x_9x_{10}$ и $x_6x_7x_8x_9x_{10}$ это произведение будет равно 100 000 000, а для остальных не будет превосходить 1 000 000. Таким образом, сумма у Васи будет не меньше 200 000 000, а у Пети не больше 118 000 000.

В случае, если Вася взял карточку $x_5x_6x_8x_9x_{10}$, он может присвоить переменным следующие значения:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_5 = x_6 = x_7 = 1, \quad x_8 = x_9 = x_{10} = 10.$$

Тогда только на 6 карточках окажется ненулевое произведение, причем для трех карточек $x_5x_6x_8x_9x_{10}$, $x_5x_7x_8x_9x_{10}$ и $x_6x_7x_8x_9x_{10}$ это произведение будет равно 1000, а для остальных трех будет равно 100. Таким образом, сумма у Васи будет не меньше 2000, а у Пети не больше 1400.

6. *Решение.* Каждой ломаной, звенья которой идут только вверх и вправо, соответствует *слово* — последовательность букв U (вверх) и R (вправо). Пусть w — любое слово и пусть $W(w)$ — червяк, соответствующий ломаной, закодированной с помощью w. Также обозначим за $D(w)$ количество способов разбить червяка $W(w)$ на доминошки.

Лемма. Выполняются следующие реккурентные соотношения:

$$D(wUU) = D(wU) + D(w), \qquad D(wRR) = D(wR) + D(w),$$
$$D(wUR) = 2D(wU) - D(w), \quad D(wRU) = 2D(wR) - D(w).$$

Доказательство. Для доказательства первого соотношения рассмотрим доминошку, которая покрывает самую правую из самых верхних клеток $W(wUU)$. Если она горизонтальна, то оставшийся червяк совпадает с $W(wU)$. Если же она вертикальна, то клетка слева от нее также может быть покрыта только вертикальной доминошкой, и тогда червяк, который остался не покрыт, совпадает с $W(w)$.

Второе соотношение получается аналогично.

Для доказательства третьего соотношения снова рассмотрим доминошку, которая покрывает самую правую из самых верхних клеток в червяке $W(wUR)$. Если она вертикальна, то оставшийся червяк совпадает с $W(wU)$. Если же она горизонтальна, то под ней и слева от нее по одной доминошке определяются однозначно (горизонтально и вертикально соответственно).

Обозначим фигуру, остающуюся после удаления этих трех доминошек, через Φ (эта фигура может и не быть червяком). Количество способов разбить фигуру Φ на доминошки равно разности $D(wUR) - D(wU)$. Рассмотрим теперь червяка $W(wU)$ и его доминошку, которая покрывает самую правую из самых верхних клеток. Если она горизонтальна, то оставшийся червяк совпадает с $W(w)$. Если же она вертикальна, то слева от нее расположена еще одна вертикальная. Заметим, что если удалить эти две вертикальные доминошки, то остается в точности фигура Φ. Таким образом, разность $D(wU) - D(w)$ тоже равна числу способов разбить фигуру Φ на доминошки.

Равенство $D(wUR) - D(wU) = D(wU) - D(w)$ равносильно третьему соотношению.

Четвертое соотношение доказывается аналогично.

Доказательство леммы закончено. □

Теперь пусть n — натуральное число, и пусть $W(w)$ — червяк, которого можно разбить на доминошки n различными способами. Пусть $w = w_1 w_2 \ldots w_\ell$ — разбиение w на буквы. Рассмотрим последовательность

$$D(\text{“”}),\ D(w_1),\ D(w_1 w_2),\ \ldots,\ D(w_1 w_2 \ldots w_{\ell-1}) = m,$$
$$D(w_1 w_2 \ldots w_\ell) = D(w) = n.$$

(Через “” обозначено пустое слово: соответствующий ему червяк является квадратом 2×2, для которого $D(\text{“”}) = 2$.)

По лемме, если a и b — два последовательных члена этой последовательности, то следующий член равен или $a + b$, или $2b - a$. Давайте разберем некоторые свойства этой последовательности.

Так как $D(\text{“”}) = 2$ и $D(U) = D(R) = 3$, два первых члена любой последовательности равны двум и трем соответственно. По индукции легко видеть, что любые два последовательных члена этой последовательности взаимно просты. Кроме того, для двух последовательных членов a, b этой последовательности $a < b < 2a$.

С другой стороны, по данным взаимно простым m и n таким, что $m < n < 2m$, мы можем построить ровно одну такую последовательность, что m и n — ее последние члены.

В самом деле, если $3m < 2n$, то предыдущий член должен быть равен $n - m$, поскольку $2(2m - n) < m$, а если $3m > 2n$, то предыдущий член последовательности должен быть равен $2m - n$, поскольку $2(n - m) < m$. Продолжая этот процесс, в конечном счете мы придем к 3 и 2, завершая последовательность.

Для данной последовательности есть ровно два червяка, которые удовлетворяют ей. Первая буквы w_1 слова w может быть выбрана любой, но все следующие буквы восстанавливаются однозначно.

Таким образом, каждой паре взаимно простых чисел m и n, для которых выполнено $m < n < 2m$, соответствует ровно два червяка, которых можно разбить на доминошки ровно n способами. При этом количество чисел, меньших n и взаимно простых с n, также ровно вдвое больше количества пар m и n, поскольку каждое такое число равно либо

m, либо $n - m$. Значит, червяков, которые можно разбить на двуклеточные доминошки ровно n различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n.

Комментарий. Факт, который требовалось доказать в задаче, является побочным результатом научной статьи И. Чанакчи и Р. Шиффлера (`https://arxiv.org/abs/1608.06568`), в которой исследуется связь между кластерными алгебрами и цепными дробями.