XI ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ
ОСНОВНОЙ (ЗАОЧНЫЙ) ТУР

Задания

I. Эссе

1. Шесть рукопожатий. Найдите статью про теорию шести рукопожатий:
https://ru.wikipedia.org/wiki/Теория_шести_рукопожатий#История_возникновения

Можно воспользоваться не только Википедией, но и другими источниками. Проанализируйте эксперименты, которые были проведены, чтобы сформулировать и обосновать эту теорию. Нет ли в них недостатков? Предположим, что вы решили проверить справедливость этой теории. Подумайте, как бы вы построили эксперимент, по возможности свободный от недостатков, присущих вашим предшественникам.

2. Исчезновение фамилий. Рассмотрим население некоторой страны, где, как правило, женщины, выходя замуж, берут фамилию мужа. Например, таким свойством обладает почти любая европейская культура. Предположим, что в какой-то семье, носящей редкую фамилию, рождались только дочери. Тогда эта фамилия может исчезнуть через поколение-два, даже если потомки этих людей существуют: ведь они, скорее всего, живут под другими фамилиями. Может случиться так, что редкая фамилия исчезает потому, что у последних носителей этой фамилии вообще не было детей. Наверняка существуют и другие факторы, влияющие на распространённость или исчезновение фамилий. Что это за факторы?

Попробуйте оценить, с какой скоростью исчезают редкие фамилии. Может быть, есть механизмы возникновения новых фамилий? Может ли статься так, что в определённых условиях, в конце концов, останется одна-единственная фамилия?

3. Реформа орфографии. В 1918 году была проведена реформа русской письменности. По новым правилам перестали писать твёрдый знак Ъ (ер) в конце слов, оканчивающихся согласным звуком. Например, предлог «В» прежде писался так: «ВЪ». Кроме того, вовсе исчезли некоторые буквы. Были и другие изменения, но они нас сейчас не интересуют.

Исчезнувшая буква	Пишется вместо нее	Примеры написания слов	
		До реформы	Сейчас
Ѣ (ять)	Е	ДѢТИ	ДЕТИ
Ѳ (фитá)	Ф	АРИѲМЕТИКА	АРИФМЕТИКА
I (и десятеричное)	И	МИЛЛIОНЪ	МИЛЛИОН
Ѵ (ижица)	И	СѴНОДЪ	СИНОД

Интересно, насколько больше или меньше бумаги стало расходоваться при печати газет, журналов и книг. Оцените полученную экономию бумаги каким-нибудь подходящим способом.

Конечно, нужно помнить про отмену твёрдого знака в концах многих слов. А ещё следует принять во внимание, что буквы немного разной ширины. Например, буква И сильно шире буквы I, буква Ф чуть-чуть шире буквы Ѳ, зато буква Е немного уже буквы Ѣ. Разумеется, при оценке экономии бумаги нужно учесть частоту букв в текстах, например, твёрдый знак фигурировал часто, буква Ѳ встречалась редко, а ижица к 1918 году осталась только в редких словах греческого происхождения, например, МѴРО, СѴНОДЪ и в производных от этих слов.

II. Задачи

4. Конкурс (от 6 класса, 1 балл). В одной социальной сети проводился конкурс фотографий. На конкурс было представлено несколько фотографий, и каждый участник мог оценить каждую фотографию, поставив ей либо 0 (не нравится), либо 1 (не очень нравится), либо 2 (очень нравится).

Было объявлено две номинации: самая привлекательная фотография, которая набрала больше всего очков, и самая отвратительная фотография, которую больше всего участников оценили в 0 очков. Могло ли случиться так, что в обеих номинациях победила одна и та же фотография?

5. Юбилей встречи (от 6 класса, 2 балла). Как известно, друг и компаньон Робинзона Крузо получил имя Пятница по той причине, что встретились они в какую-то пятницу. Это было в январе, а вот в каком году — установить уже невозможно. Робинзон уверен лишь в том, что с равными шансами это могло случиться в любой год, начиная с 1668-го и заканчивая 1671-ым. Робинзон и Пятница свято чтили день своей встречи и торжественно отмечали его каждый год. Каким днём недели мог оказаться день одиннадцатой годовщины их встречи? С какой вероятностью?

6. Девять карточек (от 6 класса, 2 балла). На 9 карточках написаны цифры от 1 до 9 — по одной на каждой карточке. Из них выбрали три случайные карточки и положили в ряд. Какова вероятность того, что получившееся трёхзначное число делится на 3?

7. Мороженое (от 6 класса, 2 балла.) Аня хочет купить мороженое, которое стоит 19 рублей. В кармане у неё две монеты по 10 рублей, две монеты по 5 рублей и одна монета в 2 рубля. Аня не глядя вынимает из кармана три монеты. Найдите вероятность того, что вынутых монет хватит, чтобы заплатить за мороженое.

8. Карты и пин-коды. Однажды карманник Кирпич[1] украл бумажник, в котором оказались четыре кредитные карты и записка с четырьмя пин-кодами к этим картам. Кирпич не знает, какой пин-код соответствует какой карте. Если три раза неправильно ввести пин-код к какой-то карте, то она заблокируется.

а) **(от 6 класса, 1 балл).** Покажите, что Кирпич сможет снять деньги с трёх карт, если будет действовать правильно.

б) **(от 7 класса, 2 балла).** Какова вероятность того, что Кирпич сможет снять деньги со всех четырёх карт?

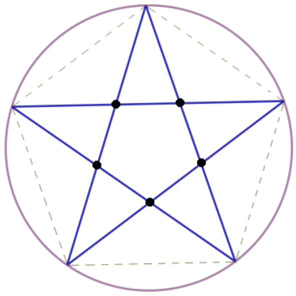
[1] Карманник Кирпич (Константин Сапрыкин) – персонаж романа братьев Вайнеров «Эра милосердия». По этому роману снят знаменитый фильм «Место встречи изменить нельзя».

9. **Мешки в сарае.** Машина привезла 4 мешка цемента. Они лежат в кузове стопкой. За раз рабочий может перетащить один мешок из машины к калитке, либо от калитки в сарай. Рабочий может таскать мешки в любом порядке, каждый раз он берёт верхний мешок, несёт его куда надо и кладёт тоже наверх стопки (если там уже есть мешки). Если есть выбор, нести мешок из машины или от калитки, то рабочий выбирает каждый из этих вариантов с вероятностью 0,5. В итоге все мешки оказались в сарае.

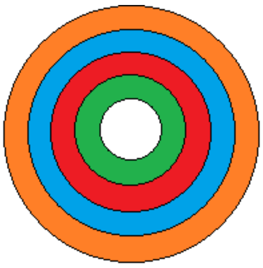
а) **(от 7 класса, 1 балл).** Какова вероятность того, что в сарае мешки окажутся в обратном порядке по сравнению с тем, как они лежали в машине?

б) **(от 7 класса, 1 балл).** Какова вероятность того, что в сарае самым нижним окажется мешок, который в машине был вторым снизу?

10. Правильные звёзды (от 8 класса, 3 балла). Пусть натуральные числа k и n взаимно просты, причём $n \geq 5$ и $k < n/2$. Правильной $(n;k)$-звездой назовём замкнутую ломаную, которая получится, если в правильном n-угольнике каждые k последовательных сторон заменить диагональю с теми же концевыми вершинами. Для примера на рисунке показана $(5;2)$-звезда. Эта звезда имеет 5 точек самопересечения — это жирные точки на рисунке. Сколько самопересечений у звезды $(2018;25)$?

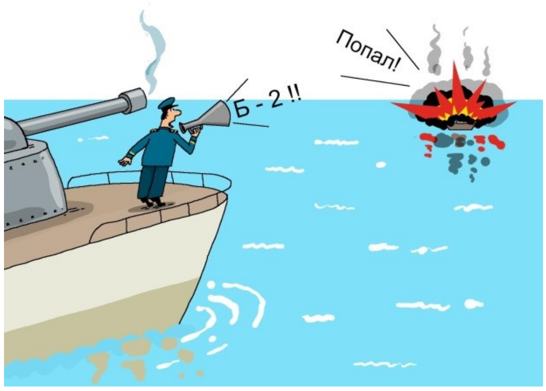


11. Одно совпадение (от 8 класса, 2 балла). В билете лотереи «6 из 45» всего 45 натуральных чисел. Из этих 45 чисел участник лотереи должен выбрать комбинацию, в которой ровно 6 чисел. Два участника независимо друг от друга выбирают свои комбинации. Какова вероятность того, что в их комбинациях окажется ровно одно общее число?



12. **Мишень (от 8 класса, 2 балла).** На стене висит мишень, состоящая из пяти зон: центральный круг (яблочко) и четыре разноцветных кольца (см. рисунок). Ширина каждого кольца равна радиусу яблочка. Известно, что число очков за попадание в каждую зону обратно пропорционально вероятности попасть в эту зону и что яблочко стоит 315 очков. Сколько очков стоит попадание в синюю (предпоследнюю) зону?

13. Залп-контроль. Артиллерийская система ракетного крейсера производит выстрел по цели. Если цель не поражена, система автоматически делает второй выстрел по той же цели. Третий выстрел по этой цели не производится. На борту крейсера 10 ракет. На учениях он выполняет стрельбы по нескольким целям в одинаковых условиях. Вероятность попадания при каждом одном выстреле равна p.



а) **(от 8 класса, 2 балла).** Если целей всего пять, какова вероятность того, что после стрельбы останется ровно три неиспользованных ракеты?

б) **(от 9 класса, 3 балла).** Найдите математическое ожидание числа поражённых целей, если всего целей девять.

14. Чемоданы в аэропорту. В самолёт было загружено 200 чемоданов. После полёта пассажиры встречают свои чемоданы на ленте транспортёра. Как только транспортёр заработал, грузчик начал класть на него чемоданы по одному через каждые две секунды в случайном порядке (как привезли). Среди пассажиров группа бизнесменов, которые ждут 10 своих чемоданов.
а) **(от 8 класса, 3 балла).** Найдите вероятность того, что после запуска транспортёра бизнесменам придется ждать свой последний чемодан ровно две минуты.
б) **(от 9 класса, 3 балла).** Найдите математическое ожидание случайной величины «время, которое бизнесменам придётся ожидать последний чемодан».

15. Два зонтика[2] (от 8 класса, 4 балла). Каждое утро Рассеянный Учёный идёт на работу, а вечером – домой. Всего у Учёного два зонтика, и Учёный берёт один из них с собой только в одном из двух случаев: либо на улице дождь, либо там, куда он идёт, зонтика нет. Через некоторое время Учёный подсчитал (а мы помним, что Рассеянный Учёный всё подсчитывает), что он берёт с собой зонтик в 20% случаев. Найдите вероятность дождя.

16. Новые правила (от 9 класса, 3 балла). В Анчурии ежегодно проходит Конгресс Городов, на который приезжают делегации всех пяти городов[3]. В делегации каждого города есть члены правящей Анчурийской Партии Прогресса (APP), а также члены оппозиционной Партии Развития Анчурии (ADP). В разных делегациях количественное соотношение политических сил разное, но в каждой делегации членов APP большинство.

Конгресс проходит в два дня, и на каждый день избирается Председатель Конгресса. Процедура выборов такова: каждый вечер накануне заседания честным жребием выбирается город, а затем среди делегатов из выбранного города честным жребием выбирается Председатель на завтра.

Однажды президент Анчурии предложил новую процедуру.

1. За неделю до Конгресса честным жребием выбирается город.
2. Председатель на каждый день выбирается честным жребием из делегатов выбранного города.

В частном разговоре с премьер-министром президент объяснил, что новая процедура увеличит вероятность того, что оба дня Председателями будут члены лояльной APP. Премьер-министр был против изменений и возразил, что из-за новой процедуры вырастет вероятность того, что оба дня Председателями окажутся члены ненавистной ADP.

Кто прав — президент или премьер-министр?

---

[2] Задача составлена по сюжету, придуманному Андреем Дмитриевичем Сахаровым про самого себя. Отличие в том, что у академика Сахарова было не два зонтика, а три пары калош. Попробуйте решить оригинальную задачу с тремя парами галош (или зонтиков). Задача восстановлена И.Ф.Гинзбургом. **Академик А.Д.Сахаров. Научные труды.** Сборник. – М.: АОЗТ «Издательство ЦентрКом», 1995).

[3] Если верить О'Генри, в Анчурии пять городов: Сан-Матео, Коралио, Солитас, Альфоран и Аласан.

17. Парадокс трёх монет[4] **(от 9 класса, 4 балла).** Митя, Ваня и Дима бросили монету по $2n$ раз. Известно, что у Мити и Вани орлов случилось поровну. Что более вероятно: событие A «у Димы выпало ровно n орлов» или событие B «у Мити выпало ровно n орлов»? Если события не равновероятны, то во сколько раз одно из этих событий вероятнее другого?

18. Одинокие автомобили. (От 9 класса, 4 балла.) По очень длинному узкому шоссе, на котором невозможен обгон, в случайном порядке едут n автомобилей, каждый со своей излюбленной скоростью. Если быстрая машина догоняет медленную, то быстрой приходится замедлиться и ехать с той же скоростью, что и медленная. Таким образом, машины сбиваются в группы. Найдите математическое ожидание числа «одиноких» машин, то есть групп, состоящих из одной машины.

19. Очерк о чемоданах (от 10 класса, 6 баллов). В книге Щепана Еленьского[5] имеется небольшой очерк о чемоданах.

В универмаг прислали 10 чемоданов, а в конверте отдельно 10 ключей, причём предупредили, что каждый ключ открывает только 1 чемодан и что к каждому чемодану можно подобрать подходящий ключ.

Работник универмага, который получал эти чемоданы, вздохнул:

– Сколько возни с подбором ключей! Я знаю, какими упрямыми бывают неодушевлённые предметы! Начнёшь подбирать ключ к первому чемодану, и обязательно окажется, что подойдёт только десятый ключ. Десять раз перепробуешь ключи из-за одного чемодана, а из-за десяти — целых сто раз!

Не будем цитировать Еленьского дальше, а кратко перескажем суть. Продавщица сказала, что число попыток не больше $10+9+8+...+2+1=55$, другой сотрудник предложил ещё уменьшить число попыток, поскольку если ключ не подошёл к 9 чемоданам, то уж к десятому он точно подойдёт. Значит, число попыток не больше $9+8+...+1=45$. Кроме того, он заявил, что так произойдёт только в самом неудачном случае — тогда, когда каждый раз ключ будет подходить к последнему чемодану. Нужно рассчитывать, что в реальности число попыток будет равно примерно половине наибольшего возможного числа попыток, то есть 22,5.

Игорь Федорович Акулич из Минска задумался, по какой такой причине среднее число попыток равно половине числа 45? Ведь последняя попытка не нужна, только если ключ не подошёл ни к одному чемодану, кроме последнего, а во всех других случаях последняя удачная попытка тоже имеет место. Акулич предположил, что утверждение про 22,5 попыток голословное, и на самом деле всё немного не так.

Задача. Найдите математическое ожидание числа попыток (считаются все попытки открыть чемоданы – неудачные и удачные, в том случае, когда нет ясности).

[4] Кажущаяся парадоксальность состоит в том, что сравнивая вероятности событий, связанных только с Димой и с Митей, приходится брать в расчёт событие, связанное с Митей и Ваней. Причём тут вообще Ваня?

[5] «По следам Пифагора» (М., Детгиз, 1961).