7 класс

Задача 1. В разноцветной семейке было поровну белых, синих и полосатых детей-осьминожков. Когда несколько синих осьминожков стали полосатыми, папа решил посчитать детей. Синих и белых вместе взятых оказалось 10, зато белых и полосатых вместе взятых — 18. Сколько детей в разноцветной семейке? [*4 балла*] (*И. В. Раскина*)

Ответ. 21.

Первое решение. Заметим, что белых осьминожков было треть от общего количества, и они не перекрашивались. Если сложить 10 и 18, то получится количество всех детей вместе, к которому прибавлено количество белых, то есть 4/3 от количества всех детей. Значит, 4/3 от количества детей в семейке равно 28, то есть всего детей 21.

Второе решение. После перекрашивания полосатых осьминожков стало на $18 - 10 = 8$ больше, чем синих. Значит, полосатыми стали $8 : 2 = 4$ синих осьминожка. Белых и «старых полосатых» было $18 - 4 = 14$, то есть по $14 : 2 = 7$ каждого цвета. А всего в разноцветной семейке $3 \cdot 7 = 21$ ребёнок.

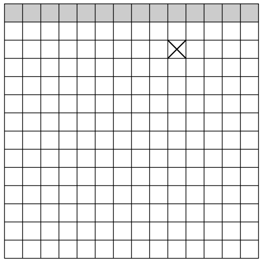
Задача 2. Использовав каждую из цифр от 0 до 9 ровно по разу, запишите 5 ненулевых чисел так, чтобы каждое делилось на предыдущее. [*6 баллов*] (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. Например, 1, 2, 4, 8, 975360.

Комментарий. Легче проверять делимость, когда большинство чисел записываются 1-2 цифрами, а для этого большинство частных должны быть совсем маленькими (2, 3, ...). Начнем с самой маленькой последовательности: 1, 2, 4, 8. Делится ли оставшееся число на 8, зависит только от его трех последних цифр. Поэтому получить из оставшихся цифр число, делящееся на 8, легко — особенно если поставить на последнее место 0.

Есть много других решений: например, 9, 18, 36, 72, 504.

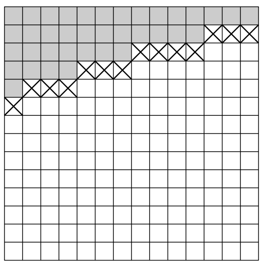
Задача 3. Все клетки верхнего ряда квадрата 14×14 заполнены водой, а в одной клетке лежит мешок с песком (см. рис.). За один ход Вася может положить мешки с песком в любые 3 не занятые водой клетки, после чего вода заполняет каждую из тех клеток, которые граничат с водой (по стороне), если в этой клетке нет мешка с песком. Ходы продолжаются, пока вода может заполнять новые клетки. Как действовать Васе, чтобы в итоге вода заполнила как можно меньше клеток? **[*8 баллов*]** (*И. В. Ященко*)



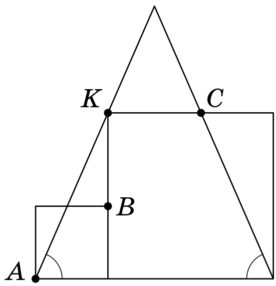
Решение. Докажем, что, как бы Вася ни действовал, вода заполнит как минимум 37 клеток.

Как бы Вася ни действовал на первом ходу, после него во втором ряду окажется не больше 3 мешков, а значит, вода заполнит не менее 11 клеток во втором ряду. Как бы Вася ни действовал на втором ходу, после него в первых двух рядах окажется не больше 7 мешков, то есть останется не менее $14 - 7 = 7$ вертикалей без мешков, по которым вода стечёт на третий ряд. Аналогичным образом после третьего хода заполнятся еще хотя бы 4 клетки, после четвёртого — хотя бы 1. Всего вода заполнит не менее $14 + 11 + 7 + 4 + 1 = 37$ клеток.

Добиться того, чтобы вода заполнила ровно 37 клеток, Вася может, положив мешки, например, как на рисунке (на первом ходу Вася кладет мешки во второй ряд, на втором — в третий и т. д.).

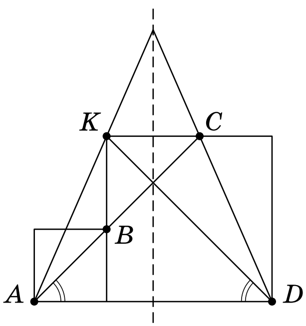


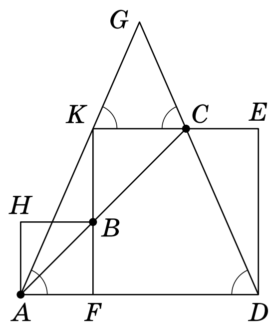
Задача 4. Два квадрата и равнобедренный треугольник расположены так, как показано на рисунке (вершина K большого квадрата лежит на стороне треугольника). Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.



[*8 баллов*] (*М. А. Евдокимов*)

Первое решение. У равнобедренного треугольника есть ось симметрии. При симметрии относительно этой оси K переходит в C, а D переходит в A (см. левый рис.). Значит, AC образует тот же угол с основанием, что и диагональ квадрата KD, т. е. 45°. Но AB тоже образует с основанием угол 45°, как диагональ меньшего квадрата. Значит, точки A, B и C действительно лежат на одной прямой.



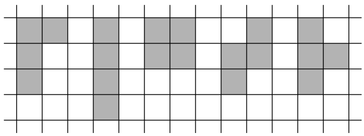


Второе решение (без использования симметрии). Введём обозначения так, как показано на рисунке справа и проведём отрезки AB и BC. Так как $\angle ABH = 45^\circ$, достаточно доказать, что $\angle KBC = \angle BCK = 45^\circ$ (тогда $\angle ABH + \angle HBK + \angle KBC = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, что равносильно утверждению задачи).

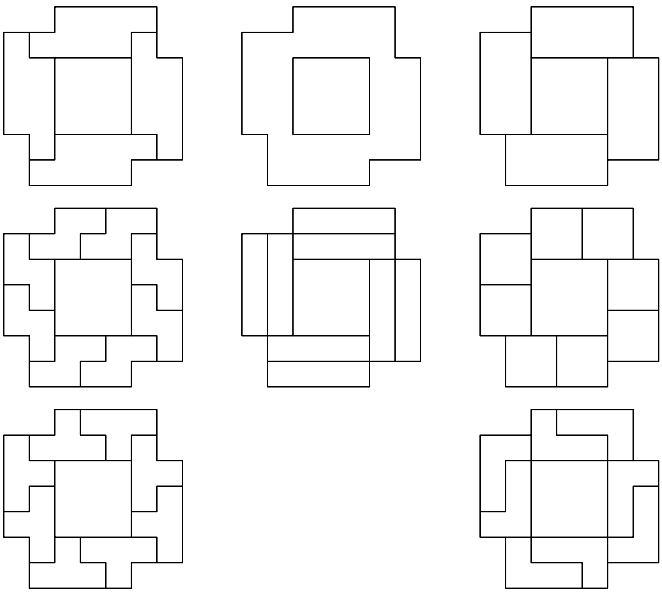
Используя равенство соответственных углов при параллельных прямых и равнобедренность треугольника AGD, получим: $\angle GKC = \angle GAD = \angle GDA = \angle GCK$. Следовательно, $GK = GC$, поэтому $AK = CD$. Значит, равны прямоугольные треугольники AKF и CDE (по гипотенузе и катету). Следовательно, $CE = AF = BF$, тогда $BK = CK$, откуда $\angle KBC = \angle BCK = 45^\circ$, что и требовалось.

Задача 5. Фигурки из четырёх клеток называются тетрамино. Они бывают пяти видов (см. рис.). Существует ли такая фигура, что при любом выборе вида тетрамино эту фигуру можно составить, используя тетраминошки только выбранного вида? (Переворачивать тетраминошки можно.)

[*10 баллов*] (*Ю. С. Маркелов, ученик 8 класса*)



Ответ. Да, существует (см. рис.).



Комментарии. 1. Следить за тем, разрезается ли фигура на фигурки 5 разных видов, тяжело. Но можно заметить, что из двух квадратов можно сложить прямоугольник 2×4, который разрезается и на квадраты, и на полоски, и на L-тетраминошки. А из двух Z-тетраминошек легко сложить «параллелограмм», который разрезается также и на T-тетраминошки. Чтобы решить задачу, остаётся придумать фигуру, которую можно составить как из прямоугольников 2×4, так и из таких параллелограммов.

2. В примере выше фигура не является многоугольником, в ней есть дырка. Существуют ли фигуры с требуемым свойством без дырок, жюри неизвестно.

Задача 6. Робин Гуд взял в плен семерых богачей и потребовал выкуп. Слуга каждого богача принёс кошелёк с золотом, и все они выстроились в очередь перед шатром, чтобы отдать выкуп. Каждый заходящий в шатер слуга кладёт принесённый им кошелёк на стол в центре шатра и, если такого или большего по тяжести кошелька ранее никто не приносил, богача отпускают вместе со слугой. Иначе слуге велят принести ещё один кошелёк, который был бы тяжелее всех, лежащих в этот момент на столе. Сходив за очередным кошельком, слуга становится в конец очереди. Походы за кошельками занимают у всех одинаковое время, поэтому очерёдность захода в шатёр не сбивается. Когда Робин Гуд отпустил всех пленников, у него на столе оказалось: а) 28; б) 27 кошельков. Каким по счёту стоял в исходной очереди слуга богача, которого отпустили последним? [***10 баллов***] (*М.А. Хачатурян*)

Ответ. а) Седьмым; б) шестым или седьмым.

Решение. Если слуга принёс новый кошелёк, а с тех пор как он был в прошлый раз в шатре, никого не отпускали, то его точно ждёт удача (его кошелёк самый тяжёлый и на этот раз его хозяина отпустят). То есть если в плену было N богачей и одного только что отпустили, то дальше может произойти не более $N - 1$ неудачи подряд.

а) Если в начале было семь богачей, то первого отпустят сразу, дальше будет не более 6 неудач, потом удача и не более 5 неудач и т. д. — и всего Робин Гуд получит не более

$(1+6)+(1+5)+(1+4)+(1+3)+(1+2)+(1+1)+1=$ $=28$ кошельков. И ровно 28 кошельков он получит, только если на первом круге неудача постигла всех, кроме первого, потом всех, кроме второго и т. д. А последним положит кошелёк седьмой слуга.

б) Если Робин Гуд получил в итоге не 28, а 27 кошельков, то ровно один промежуток неудач должен оказаться на 1 короче максимального. Тогда он закончится не после перехода на следующий круг, а на один шаг раньше, и на этом круге кроме слуги с наименьшим номером повезёт ещё и седьмому слуге.

Если это произошло на последнем круге, когда все остальные слуги уже ушли, то седьмой слуга и положит последний кошелёк. А если какие-то слуги ещё остались, когда седьмому слуге выпала удача вне очереди, то оставшиеся продолжат уходить по очереди, как в предыдущем пункте. И последний кошелёк положит последний из оставшихся — шестой слуга.