МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО АСТРОНОМИИ. 2017–2018 уч. г.
ОЧНЫЙ ЭТАП
8–9 классы

Решения и критерии оценивания

Задача 1

Как часто наступали бы полнолуния, если бы масса Земли была в 27 раз меньше, а расстояние от Земли до Луны – в 4 раза меньше?

Решение

Как известно, Луна в 81 раз легче Земли. Если бы масса Земли была в 27 раз меньше, то она была бы лишь в 3 раза тяжелее Луны. Пусть m – масса Луны. Современная масса системы Земля-Луна составляет 81m + 1m = 82m, а данная в условии задачи – всего (81/27)m + 1m = 4m. Тогда, в соответствии с третьим законом Кеплера,

$$P = P_0\sqrt{\frac{82\,m}{4\,m\cdot 4^3}} \approx 0.567\,P_0 \approx 15.5\text{ сут.}$$

Время между двумя полнолуниями – это синодический период. Пусть T – период обращения Земли вокруг Солнца. Тогда

$$S = \frac{TP}{T-P} \approx 16.1\text{ дня.}$$

Рекомендации для жюри

Правильное использование третьего закона Кеплера оценивается в **5 баллов**. Если при решении не учитывается масса Луны, оценка **снижается на 3 балла**. Правильное применение уравнения синодического движения оценивается в **3 балла**. Ошибка в вычислениях **снижает** оценку за этап, в котором она была сделана, **на 2 балла**.

Максимальная оценка – **8 баллов.**

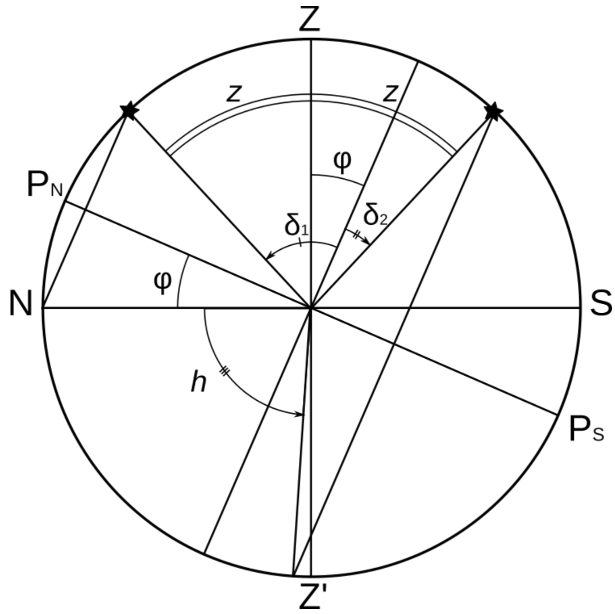
(Е. Н. Фадеев)

Задача 2

Две звезды на широте 23.5° в верхней кульминации располагаются симметрично относительно зенита. Обе звезды заходящие. На какой минимальной высоте может происходить нижняя кульминация этих звёзд (до какой минимальной высоты может опуститься та из звёзд, которая опускается ниже)? Решение сопроводите чертежом.

Решение

Звезда, кульминирующая к северу от зенита, имеет нижнюю кульминацию на горизонте при склонении $\delta_1 = 90° - \varphi = 66.5°$. Верхняя кульминация этой звезды будет на зенитном расстоянии $z = \delta_1 - \varphi = 43°$. Это максимальное зенитное расстояние. При большем нижняя кульминация звезды окажется выше горизонта.



Вторая звезда кульминирует на таком же зенитном расстоянии, но к югу от зенита. Склонение этой звезды составит $\delta_2 = \varphi - z = -19.5°$. Кульминируют в надире звезды со склонением равным $-\varphi = -23{,}5°$. При ещё меньшем склонении кульминация произойдёт к югу от надира, а при большем – к северу. δ_2 – это минимальное склонение звезды. Значит, при любом значении z звёзды будут кульминировать к северу от надира и самым глубоким будет погружение под горизонт при склонении равном δ_2. Минимальная высота составит

$$h = \delta_2 + \varphi - 90° = -19.5° + 23.5° - 90° = -86°.$$

Рекомендации для жюри

Ключевым шагом для решения задачи является ограничение (**2 балла**) на минимальное склонение более южной звезды и его вычисление (**2 балла**). Определение минимальной высоты нижней кульминации южной звезды оценивается ещё в **4 балла**. Ошибка в вычислениях **снижает** оценку за данный этап **на 1 балл**. Если ошибка приводит к тому, что нижняя кульминация звезды происходит к югу от зенита, то оценка **снижается на 2 балла**, если в ответе получается надир, и **на 3 балла** в остальных случаях. Ответ -90° (надир), если только он не был получен в результате вычислительной ошибки, оценивается в **0 баллов**.

Максимальная оценка – **8 баллов.**

(Е. Н. Фадеев)

Задача 3

Пароход отправился из Неаполя 26 февраля 1900 года и прибыл в Новороссийск 20 февраля 1900 года. Проведя в Новороссийске 5 дней пароход отправился обратно в Неаполь. Определите дату, которая будет на календаре начальника неаполитанского порта в момент возвращения парохода, если оба путешествия заняли одинаковое время. Определите среднюю скорость парохода в километрах в час, если он находился в плавании целое число суток. Расстояние, пройденное пароходом от Неаполя до Новороссийска, равно 2880 км.

Решение

Очевидно, что дата прибытия меньше, чем дата отправления, потому что в это время в Италии уже использовался григорианский календарь, а Российская империя всё ещё жила по юлианскому календарю, т. н. старому стилю. Отличие григорианского летоисчисления от юлианского в том, что если номер года кратен 100 и не кратен 400, то он не является високосным. 1900 год как раз относится к таким.

Сейчас разница между юлианским и григорианским календарями составляет 13 дней. Но до 13 марта 1900 года по григорианскому календарю (29 февраля 1900 года по юлианскому) эта разница составляла всего 12 дней. Значит, по юлианскому календарю пароход отправился из Неаполя 14 февраля, а следовательно, в плавании он находился 6 дней, или 144 часа. Тогда его средняя скорость равна

$$v = 2880 \text{ км} / 144 \text{ часов} = 20 \text{ км/ч}.$$

В обратный путь пароход отправится 25 февраля и прибудет в Неаполь 2 марта по юлианскому календарю. Календарь начальника порта григорианский и к этой дате разница в календарях достигнет 13-ти дней. Значит, в Неаполе будет 15 марта.

Иначе, пароход находился в плавании $2 \cdot 6 = 12$ дней и 5 дней стоял в Новороссийске, т.е. вернулся обратно через 17 дней после 26 февраля. Поскольку в феврале 1900 г. по григорианскому календарю 28 дней, то дата возвращения – 15 марта.

Рекомендации для жюри

Понимание того, что в разных странах действовали разные календари оценивается в **1 балл**. Указание на то, что в то время разница была не 13, а 12 дней – **2 балла**. Правильное вычисление продолжительности плавания, следующее из различия календарей – **1 балл.** Вычисление средней скорости плавания оценивается в **1 балл** – формула и **1 балл** – правильный ответ. Правильное вычисление даты возвращения в Неаполь – **2 балла** (1 балл за метод вычисления и 1 балл за правильный ответ).

Максимальная оценка– **8 баллов.**

(Е. Н. Фадеев)

Задача 4

Могут ли произойти в один и тот же месяц:

а) покрытия Луной Альдебарана и Регула;
б) покрытия Луной Альдебарана и Антареса;
в) покрытия Луной Антареса и Регула?

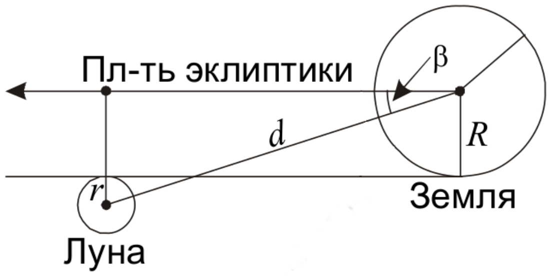
Ответ обоснуйте математически.

Звезда	Эклиптические координаты	
	Долгота	Широта
Альдебаран	4^h39^m	-5°28′
Антарес	16^h39^m	-4°34′
Регул	9^h56^m	0°27′

Решение

Нетрудно заметить, что эклиптические долготы Альдебарана и Антареса отличаются на 12^h, и обе звезды находятся на несколько градусов южнее эклиптики. За счёт наклонения орбиты к эклиптике на 5° и суточного параллакса Луна может проецироваться для земного наблюдателя на обе эти звезды. Однако серии покрытий этих звёзд происходят в разные годы, так как, когда одна половина лунной орбиты расположена южнее эклиптики, другая половина расположена севернее. Итак, в пункте б) ответ отрицательный.

Регул же, наоборот, расположен очень близко к эклиптике, и его эклиптическая долгота на 5^h17^m больше, чем у Альдебарана и на 6^h43^m меньше, чем у Антареса. Поэтому в те годы, когда происходят покрытия Альдебарана, вблизи Регула находится восходящий узел лунной орбиты, а в те годы, когда происходят покрытия Антареса, – нисходящий.

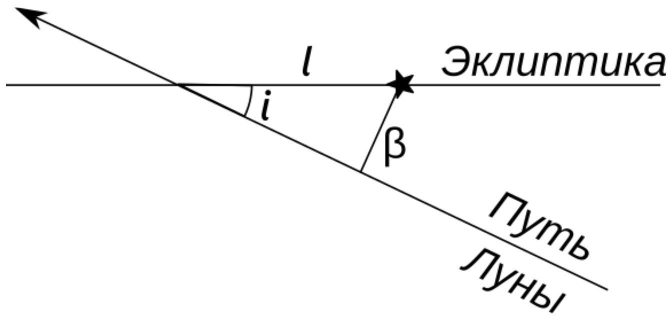


Определим, возможны ли одновременные покрытия. Для этого оценим, как далеко от Регула может находиться узел орбиты Луны, чтобы покрытия были возможными. Пусть R и r – радиусы Луны и Земли, а d – расстояния между их центрами. Для простоты предположим, что Регул находится на эклиптике. Тогда покрытие хотя бы в одном месте на Земле можно будет наблюдать, если центр Луны окажется от звезды на расстоянии

$$\beta = \arcsin\frac{R+r}{d} \approx 1.2°.$$

Максимальное угловое расстояние узла орбиты от Регула l равно

$$l = \frac{\beta}{\sin i} \approx 13.4° \approx 53^m .$$



Здесь для упрощения вычислений мы воспользовались малостью наклона орбиты Луны. Узкий пояс небесной сферы вдоль большого круга – эклиптики допустимо представлять как боковую поверхность цилиндра, которая может быть развёрнута в плоскость. Поэтому и допустимо использовать плоские треугольники.

В те моменты времени, когда Луна, находясь дальше всего от эклиптики, покрывает Антарес или Альдебаран, узел её орбиты имеет эклиптическую долготу 10^h39^m и располагается на расстоянии 43^m от Регула вдоль эклиптики. Отсюда делаем вывод, что варианты а) и в) возможны. А если учесть, что покрытия Альдебарана и Антареса возможны в течение нескольких лет, то такие «единомесячные» покрытия происходят неоднократно.

Примечание: как раз сейчас идёт серия покрытий и Альдебарана, и Регула (в конце 2017 года произошли: покрытия Альдебарана 3 декабря и 31 декабря и покрытие Регула 9 декабря). Полпериода поворота узлов лунной орбиты назад, в 2007-2008 годах, также была серия покрытий Регула, которая наложилась на серию покрытий Антареса 2005-2009 годов.

Рекомендации для жюри

Вывод о невозможности покрытий в один месяц Антареса и Альдебарана оценивается в **2 балла** (**1 балл** за ответ и **1 балл** за объяснение). Обоснование справедливости пунктов а) и в) оценивается из **4 баллов** (**по 2 балла** за пункт, если доказательства раздельные). Правильный ответ о том, что пункты а) и в) справедливы, оценивается **по 1 баллу** за каждый пункт. Ответы без обоснований, даже правильные, оцениваются в **0 баллов**.

Максимальная оценка – **8 баллов.**

(Н. Е. Шатовская)

Задача 5

После гравитационного манёвра около Юпитера зонд «Улисс», предназначенный для изучения солнечной магнитосферы, направился к Солнцу по энергетически выгодной (гомановской) траектории по гелиоцентрической орбите, перпендикулярной плоскости эклиптики, с периодом 6.2 года. На какой высоте он пролетел над северным полюсом Солнца? Наклоном оси вращения Солнца к оси эклиптики пренебречь.

Решение

Зная орбитальный период зонда T можно определить большую полуось его орбиты с помощью третьего закона Кеплера. Выражая период в годах, получим большую полуось орбиты в астрономических единицах:

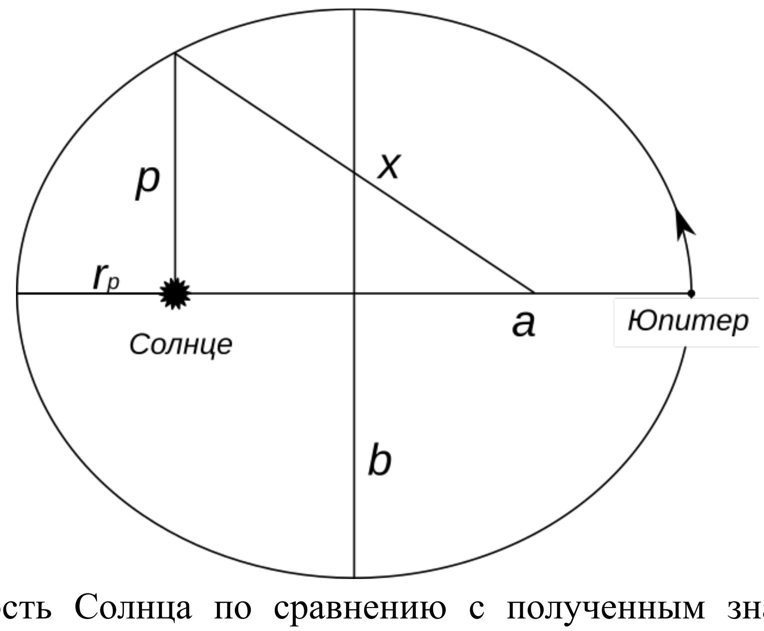
$$a = T^{2/3} \approx 3.4 \text{ а.е.}$$

Раз зонд движется по гомановской энергетически выгодной орбите, а её большая полуось меньше радиуса орбиты Юпитера, то, улетая от Юпитера, зонд находился в афелии своей орбиты. Отсюда можно определить эксцентриситет орбиты зонда:

$$e = \frac{r}{a} - 1 = 0.53.$$

Солнце находится в фокусе орбиты. В момент, когда зонд находится над его северным полюсом, отрезок Солнце-зонд перпендикулярен большой оси орбиты. Это расстояние называется фокальный параметр p. Найдём его величину. Пусть x – расстояние от зонда до второго фокуса. Тогда из определения эллипса $x + p = 2a$. С другой стороны, из теоремы Пифагора $x^2 = p^2 + 4a^2e^2$. Исключая из уравнений x, получаем

$$p = a\left(1 - e^2\right) = 2.4 \text{ а.е.} \approx 3.6 \times 10^8 \text{ км.}$$



Учитывая малость Солнца по сравнению с полученным значением, можно сказать, что зонд пролетел на высоте p над северным полюсом Солнца.

Рекомендации для жюри

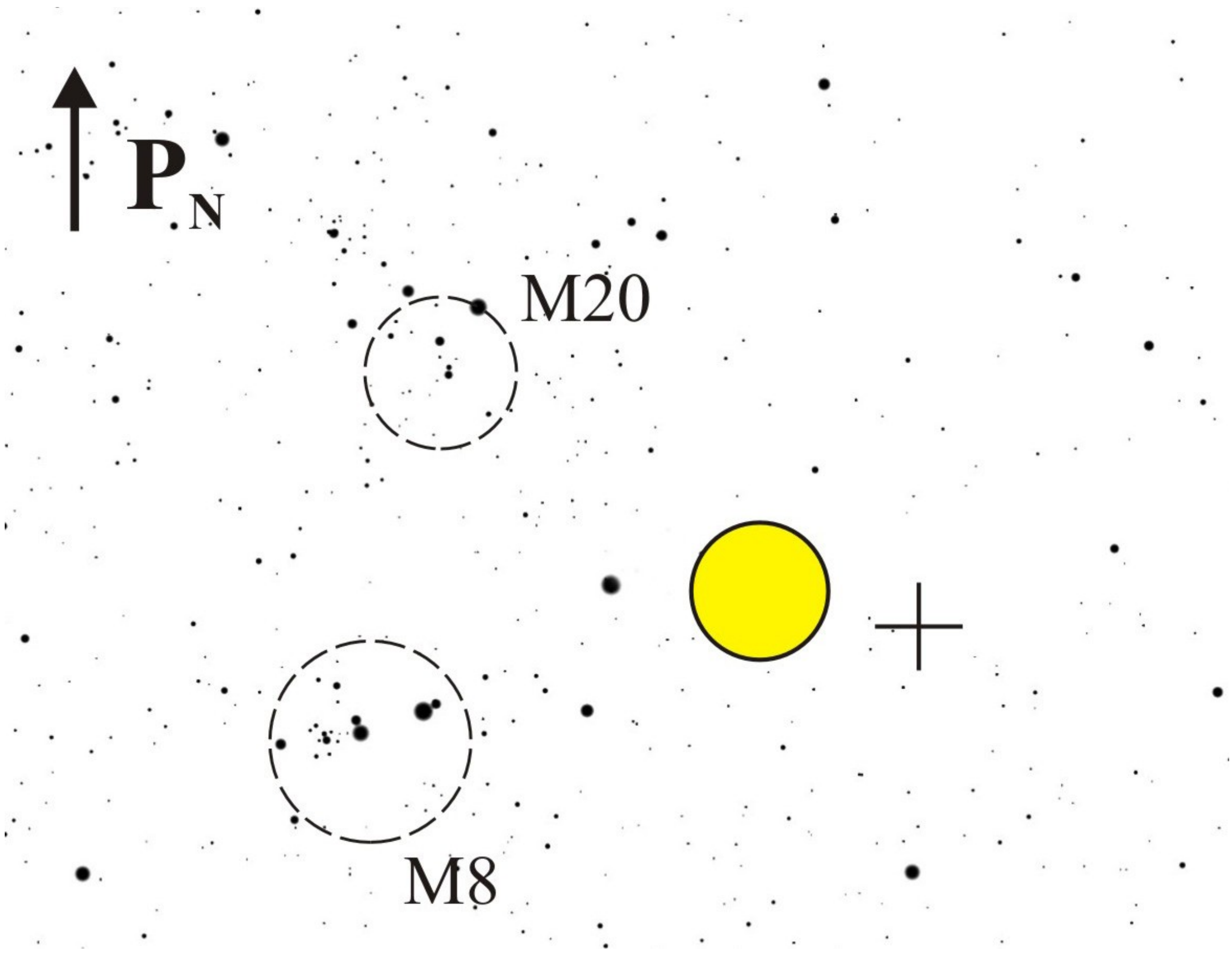
Вычисление большой полуоси оценивается в **2 балла**, эксцентриситета – ещё в **2 балла**. Вывод формулы для фокального расстояния необязателен, её могут знать. Правильное использование этой формулы оценивается в **2 балла**. Окончательный ответ - **2 балла**.

Максимальная оценка – **8 баллов.**

(К. И. Васильев)

Задача 6

В 20-ых числах декабря Солнце находится на небе рядом с известными объектами Мессье – M8 и M20. На рисунке представлен фрагмент карты (изображение не перевёрнутое, направление на северный полюс Мира указано стрелкой) с нарисованным на ней положением Солнца и Меркурия (оно показано крестиком). Как Вы думаете, центр какого из этих объектов раньше пересечёт линию, соединяющую центры туманностей – Солнца или Меркурия? Через сколько времени произойдёт первое пересечение? Ответы обоснуйте.



Решение

Используя угловой диаметр солнечного диска в качестве «линейки» (32′ – по условию задачи Земля находится недалеко от перигелия своей орбиты), найдём угловые расстояния от Меркурия и от центра диска Солнца до линии, соединяющей центры туманностей.

Так как событие происходит около 22 декабря, то Солнце находится в точке солнцестояния. В это время эклиптика на карте такого масштаба представляет собой почти прямую линию, параллельную экватору (т. е. горизонтальной стороне рисунка). Поэтому от центра Солнца до линии между центра M20 и M8 будет 83′.

Солнце пройдёт 83′ за время

$$t_1 \approx \frac{83'}{360 \cdot \frac{60}{365.24}} \approx 1.4 \text{ дня} \approx 33.7 \text{ ч.}$$

Определить расстояние от Меркурия до этой линии сложнее, т. к. его орбита имеет значительный наклон к эклиптике. Однако мы видим, что на рисунке Меркурий находится почти на эклиптике, т.е. недалеко от одного из узлов своей орбиты. А значит, он будет двигаться либо вверх, либо вниз от эклиптики под углом, равным наклонению своей орбиты, т. е. 7°. В одном случае до пересечения с линией между центрами туманностей ему придётся пройти расстояние чуть больше 125′, в другом – чуть больше 120′.

Мы видим, что планета находится почти в соединении с Солнцем. Если это нижнее соединение, то орбитальная скорость Меркурия сонаправлена с вектором скорости Земли, но больше неё. А значит, Меркурий по небу будет двигаться в сторону, противоположную движению Солнца. Т.е. Солнце пересечёт указанную в условии линию раньше Меркурия.

Примечание: на самом деле в декабре у Меркурия не может наблюдаться нижнее соединение с Солнцем так близко к эклиптике, т.е. к узлу орбиты да ещё с отрицательной эклиптической широтой (т. к. прохождения Меркурия бывают в ноябре и мае, а ноябрьские прохождения наблюдаются в восходящем узле орбиты).

Если Меркурий находится в верхнем соединении, то вектор его скорости противоположен по направлению орбитальной скорости Земли, а значит, относительно Земли он будет двигаться с их суммарной скоростью. Найдём угловую скорость движения Меркурия. Для этого вычислим величину его афелийной орбитальной скорости. Если её окажется достаточно, чтобы обогнать Солнце на небе, то другие варианты можно не рассматривать:

$$V_M = \sqrt{\frac{GM_S}{a_M}} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \approx 40\,\text{км/с}.$$

Отсюда угловая скорость Меркурия в верхнем соединении:

$$\omega = \frac{V_M + V_E}{a_M + a_E} = \frac{70\,\text{км/с}}{1.39\,\text{а.е.}} = 3.36 \cdot 10^{-7}\,\text{рад/с} \approx 4.2'/\text{ч}.$$

С такой скоростью угол в 125′ Меркурий пройдёт за 29.8 ч. Значит, он успеет пересечь линию между центрами туманностей раньше Солнца, даже двигаясь с минимальной скоростью по орбите.

Рекомендации для жюри

Определение масштаба фотографии – **1 балл**. Определение углового расстояния, которое осталось пройти Солнцу, и вычисление этого времени – по **1 баллу**. Указание на то, что вариантов требуется рассмотреть 2 – **1 балл**. Правильный вывод для случая нижнего соединения – **1 балл**. Случай верхнего соединения оценивается из **7 баллов**: **2 балла** за учёт движения Меркурия под углом к эклиптике, **2 балла** за вычисление линейной скорости Меркурия (если рассматривается только круговая скорость, то **1 балл), 2 балла** за правильное вычисление угловой скорости (**1 балл** за формулу и **1 балл** за вычисление) и **последний балл** за окончательный ответ.

Максимальная оценка – **12 баллов.**

(А. М. Татарников)

Всего за работу – 52 балла.