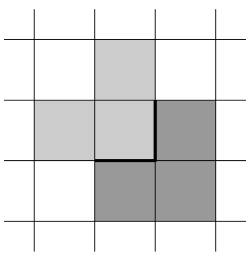
1. *Ответ*. 3750.

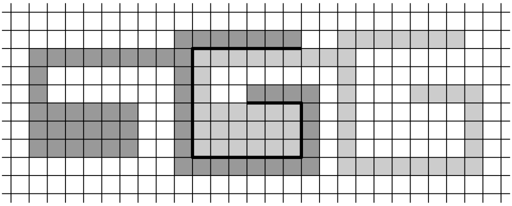
Решение. По условию $\overline{aA} = 5A$ (где A — число, составленное из всех цифр, кроме первой, a — первая цифра). Пусть n — количество цифр в числе $\overline{aA}$. Отсюда, $4A = a \cdot 10^{n-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow A = 25a \cdot 10^{n-3}$. Если $n > 4$, то у числа A, а значит, и у искомого числа, есть две совпадающие цифры (два нуля на конце). Если же $n = 4$, то $A = 250a$. Ясно, что чем больше a, тем больше исходное число. При $a \geqslant 4$ число $250a$ состоит из 4 цифр, а не из трех. При $a = 3$ мы получаем $A = 750$, а исходное число равно 3750. Значит, наибольшее искомое число равно 3750.

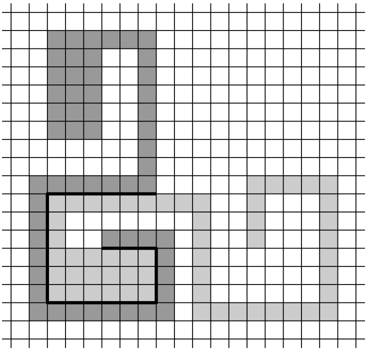
2. *Решение*. Предположим, что в каком-то туре не было игры между земляками. Тогда участники разбиваются на пары людей из разных городов. Рассмотрим произвольного участника. В каждой паре есть не более одного его земляка, также второй участник из его пары не является его земляком. Но тогда всего земляков у него меньше половины из всех участников. Значит, каждый участник сыграл больше игр с неземляками, чем с земляками, и в сумме игр между земляками было меньше половины. Противоречие.

3. *Ответ*. Приведем возможные примеры таких фигур.

а)



б) 



Комментарий. Подобным образом можно построить фигуру для любого несамопересекающегося разреза.

4. *Ответ.* $a = 1$, k — любое.

Решение. Если $a = 1$, то $a^{k^n+1} - 1 = 0$, а значит, делится на n. Пусть теперь $a \geqslant 2$. Возьмем $n = a^k - 1$, тогда $a^k \equiv 1 \pmod{n}$, и следовательно,

$$0 \equiv a^{k^n+1} - 1 \equiv (a^k)^{k^{n-1}} \cdot a - 1 \equiv 1^{k^{n-1}} \cdot a - 1 \equiv a - 1 \pmod{a^k - 1}.$$

Такое может быть только при $k = 1$, но в этом случае $a^{k^n+1} - 1 = a^2 - 1$ должно делиться на все n, что невозможно. Таким образом, пары, в которых $a \geqslant 2$, нам не подходят.

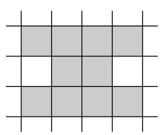
5. *Ответ.* Нет, не обязательно.

Решение. Такая фигура, отличная от прямоугольника, существует. На рисунке представлены все 4 варианта расположения Ф с точностью до параллельного переноса.

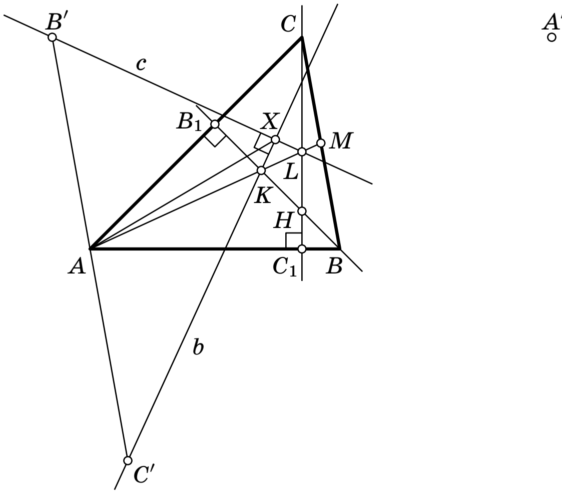
Пронумеруем цвета числами от 1 до 10, а строки и столбцы числами от 1 до 1000. Раскрасим клетку с координатами (i, j) в цвет с номером $(i - 1 + 5(j - 1)) \bmod 10 + 1$. Заметим, что правое верхнее и левое нижнее расположения содержат по одной доминошке в пяти подряд идущих строках. Значит, там есть все пары $(1, 6)$, $(2, 7)$, $(3, 8)$, $(4, 9)$, (5, 10). В случаях правого нижнего и левого верхнего расположений рассуждение то же, нужно лишь заметить, что верхняя и нижняя клетки имеют разные цвета, дающие одинаковый остаток при делении на 5. А значит, и в этом случае цвета клеток фигурки различны.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		999	1000
1	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	⋯	1	6
2	2	7	2	7	2	7	2	7	2	7	2	7	⋯	2	7
3	3	8	3	8	3	8	3	8	3	8	3	8	⋯	3	8
4	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9	⋯	4	9
5	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	⋯	5	10
6	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	⋯	6	1
7	7	2	7	2	7	2	7	2	7	2	7	2	⋯	7	2
8	8	3	8	3	8	3	8	3	8	3	8	3	⋯	8	3
9	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4	⋯	9	4
10	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	⋯	10	5
11	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	⋯	1	6
12	2	7	2	7	2	7	2	7	2	7	2	7	⋯	2	7
13	3	8	3	8	3	8	3	8	3	8	3	8	⋯	3	8
14	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9	⋯	4	9
15	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	⋯	5	10
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
999	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4	⋯	9	4
1000	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	⋯	10	5

Комментарий. Данный пример не единственный, можно также придумать пример раскраски для такой фигуры:



6. *Решение*. Обозначим точки, симметричные вершинам треугольника относительно середин противоположных сторон, через A', B', C' соответственно. Очевидно, что точки A, B, C являются серединами сторон треугольника $A'B'C'$. Высота BB_1 перпендикулярна прямой AC, а значит, и прямой $A'C'$. Получаем, что точки A' и C' симметричны относительно BB_1. Несложно понять, что точка A' лежит на медиане AM. Тогда точка C' лежит на прямой b в силу симметрии. Аналогично можно показать, что B' лежит на прямой c.



Докажем, что $b \perp c$. Обозначим через K и L точки пересечения прямой AM с прямыми BB_1 и CC_1 соответственно, а точку пересечения высот через H. Тогда верны следующие равенства:

$$\angle(AM, BB_1) = \angle(BB_1, b), \quad \angle(AM, CC_1) = \angle(CC_1, c),$$

$$\begin{aligned}\angle(b, c) &= \angle(b, AM) + \angle(AM, c) = \\ &= 2\angle(BB_1, AM) + 2\angle(AM, CC_1) = 2\angle(BB_1, CC_1) = \\ &= 2\angle(B_1H, HC_1) = 2\angle(B_1A, AC_1) = 2\angle(BA, AC) = 90^\circ.\end{aligned}$$

Рассмотрим треугольник $B'XC'$. $B'C' = 2BC$, причем A — середина $B'C'$, $\angle B'XC' = 90^\circ$. Тогда $AX = AB' = AC' = BC$.