МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО РОБОТОТЕХНИКЕ 2015–2016 уч. г. ОЧНЫЙ ЭТАП

9–11 классы

1. Робот движется по наклонной плоскости без проскальзывания (см. рисунок 1) угол наклона *«Альфа»* равен 30°. Центр масс робота находится в точке А, масса робота $m_1 = 1$ кг. Расстояние от точки А до наклонной плоскости принять равным 0 м (эта величина называется «клиренс»). Высота робота АБ = 0,4 м. Колеса робота установлены, как показано на рисунке, симметрично прямой (АБ), расстояние между точками касания колёс В и Г с наклонной плоскостью равно ВГ =20 см. В верхней точке наклонной плоскости робот берёт груз массой m_2 и укладывает его на себя, как показано на рисунке 1. Центр масс всего груза находится в точке Б. Толщиной грузов по сравнению с АВ можно пренебречь. Определите максимальную массу «м2», при которой робот не ***начнёт*** опрокидываться.

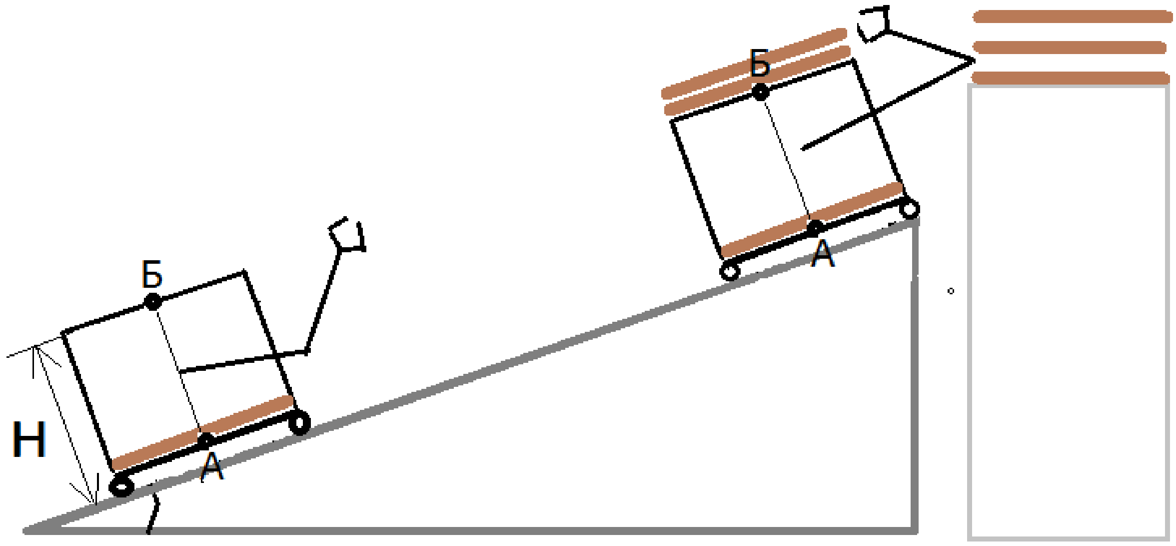


Рис.1

Определение центра масс. Если тело можно разбить на **n** *элементов, массы которых* $m_1, m_2, \ldots, m_n$, *и если известны координаты центров масс этих элементов* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *то координата центра масс тела вычисляется по формуле:*

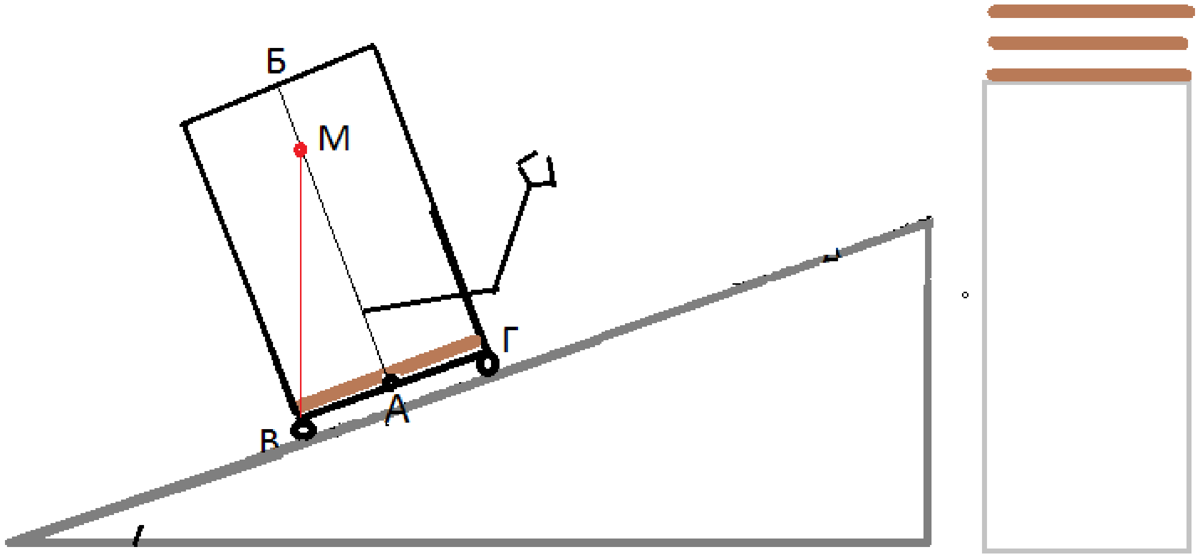
$$\boxed{x_C = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}}$$

(25 баллов)

Ответ: предельно-допустимая масса составляет:

$$m_2 = \frac{\sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}}$$

РЕШЕНИЕ:



Так как центр масс робота расположен в т.А, а центр масс груза расположен в т.Б, то центр масс робота с грузом располагается в т.М на прямой АБ. Если вертикальная линия, проведенная через центр тяжести М тела, пересекает площадь опоры, то тело находится в равновесии. Если же вертикальная линия, проведенная через центр тяжести, не пересекает площадь опоры, то тело опрокидывается.

Рассмотрим граничный случай, когда проекция т.М.на ось ОХ совпадает с проекцией т.В на эту ось.

Тогда, используя, формулу:

$$\boxed{x_C = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}}$$

Получаем:

$x_{\text{М}} = \frac{x_{\text{А}} m_1 + x_{\text{Б}} m_2}{m_1 + m_2}$,

При этом координаты $x_{\text{М}}$ и $x_{\text{Б}}$ можно выразить через $x_{\text{А}}$ и угол α:

$x_{\text{М}} = x_{\text{А}} - 0{,}1 cos\alpha \quad = x_{\text{А}} - 0{,}1\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_{\text{Б}} = x_{\text{А}} - 0{,}4 sin\alpha = x_{\text{А}} - 0{,}4\frac{1}{2}$

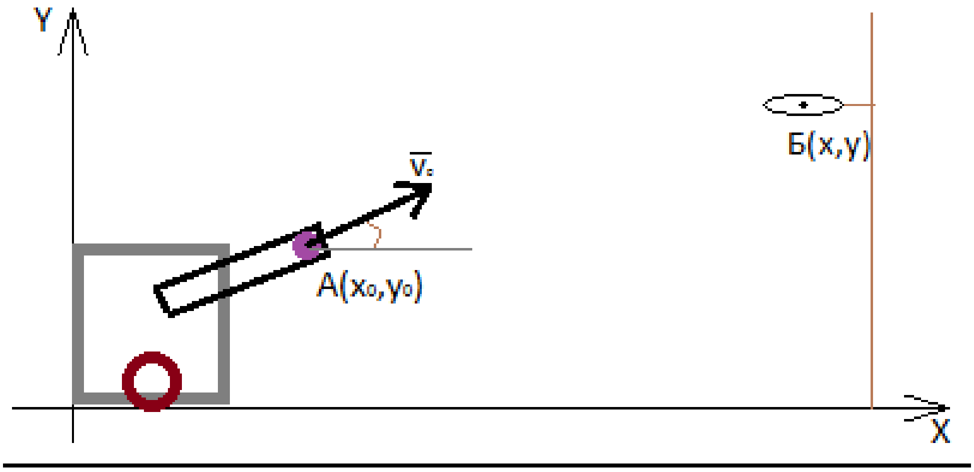
Подставим эти данные в исходное выражение и решим полученное уравнение:

$$\left(x_{\text{А}} - 0{,}1\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ (1 + m_2) = x_{\text{А}} + \left(x_{\text{А}} - 0{,}4\frac{1}{2}\right)m_2$$

$$\left(0{,}4\frac{1}{2} - 0{,}1\frac{\sqrt{3}}{2}\right)m_2 = 0{,}1\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$m_2 = \frac{\sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}}$$

2. Робот находится в заданной точке в состоянии покоя. Задача робота – забросить мяч в корзину с заданными координатами Б (22,11) (координаты в метрах) – центр корзины. На роботе установлено устройство, которое выстреливает мяч с заданной начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с из точки А (2,1). Определите угол наклона этого устройства к горизонту, чтобы робот забросил мяч в корзину. Размеры мяча строго соответствуют размерам корзины.



(15 баллов)

Решение:

Запишем уравнения для тела, брошенного под углом к горизонту:

$$\begin{cases} v_0 sin\alpha t - \dfrac{gt^2}{2} = y_Б - y_А \\ v_0 cos\alpha t = x_Б - x_А \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20 sin\alpha t - 5t^2 = 11 - 1 \\ 20 cos\alpha t = 22 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 sin\alpha t - t^2 = 2 \\ t = \dfrac{1}{cos\alpha} \end{cases}$$

$$4tg\alpha - \frac{1}{cos^2\alpha} = 2$$

Пользуясь, формулами тригонометрии:

$$\frac{1}{cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha$$

Получаем квадратное уравнение:

$$tg^2\alpha - 4tg\alpha + 3 = 0$$

Это уравнение имеет два решения:

$$\boldsymbol{tg\alpha = 1, tg\alpha = 3}$$

Ответ: tgα = 1, tgα = 3. Если проведён анализ, почему ответ «tgα = 1» не подходит **(+10 баллов)**.

Так как мяч летит по параболе, первое решение дает точку «взлета», а значит, в корзину мяч не залетит, второе решение дает точку «падения», и значит, подходит.

