LXXIX Московская математическая олимпиада

13 марта 2016 года • 8 класс

Задача 1. Можно ли число $\frac{1}{10}$ представить в виде произведения десяти положительных правильных дробей? (То есть выражений вида $\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа и $p < q$.)

Задача 2. За круглым столом сидят 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Двое из них заявили: «Оба моих соседа — лжецы», а остальные восемь заявили: «Оба моих соседа — рыцари». Сколько рыцарей могло быть среди этих 10 человек? (Перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет.)

Задача 3. На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60°$. Докажите, что $AC = BK$.

Задача 4. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 99, в десятичной записи которого участвуют только четные цифры.

Задача 5. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, все стороны которого равны между собой. Известно, что угол A равен $120°$, угол C равен $135°$, а угол D равен $n°$. Найдите все возможные целые значения n.

Задача 6. Четное число орехов разложено на три кучки. За одну операцию можно переложить половину орехов из кучки с четным числом орехов в любую другую кучку. Докажите, что, как бы орехи ни были разложены изначально, такими операциями можно в какой-нибудь кучке собрать ровно половину всех орехов.
