## 1. Задача 1

В прилагаемом файле (см. страницу 3) приведено ноябрьское заочное задание для 11-го класса. Подготовьте несколько листов в клетку, на которых от руки напишите развёрнутые решения прилагаемых задач. Сфотографируйте страницы с Вашими решениями так, чтобы текст было четко видно. Создайте архив фотографий с решениями и прикрепите к заданию. Развёрнутые решения задач оцениваются из 30 очков (по 6 очков за развёрнутое решение каждой задачи).

## 2. Задача 2

Чему равна максимально возможная скорость тени в задаче 1? Ответ представьте в м/с и округлите до десятых. Единицы измерений указывать не нужно. За правильный ответ даётся 2 очка.

**Ответ:** 3

## 3. Задача 3

Чему равна минимально возможная скорость тени в задаче 1? Ответ представьте в м/с и округлите до десятых. Единицы измерений указывать не нужно. За правильный ответ даётся 2 очка.

**Ответ:** 1

## 4. Задача 4

Чему равна скорость воды в задаче 2? Ответ представьте в м/с и округлите до десятых. Единицы измерений указывать не нужно. За правильный ответ дается 1 очко.

**Ответ:** 3

## 5. Задача 5

На какой промежуток времени в задаче 2 каждые 2 минуты открываются горизонтальные трубки? Ответ представьте в секундах и округлите до десятых. Единицы измерений указывать не нужно. За правильный ответ даётся 3 очка.

**Ответ:** 8

## 6. Задача 6

Введите ответ для установившейся температуры в задаче 3. Ответ представьте в градусах Цельсия и округлите до десятых. Единицы измерений указывать не нужно. За правильный ответ даётся 4 очка.

**Ответ:** 24

## 7. Задача 7

Введите наименьшее число молей в цилиндре в задаче 4. Ответ округлите до десятых. Единицы измерений указывать не нужно. За правильный ответ даётся 2 очка.

**Ответ:** 1,4

## 8. Задача 8

Введите наибольшее число молей в цилиндре в задаче 4. Ответ округлите до десятых. Единицы измерений указывать не нужно. За правильный ответ даётся 2 очка.

**Ответ:** 1,6

## 9. Задача 9

Введите модуль электрического заряда на пластинах конденсатора, подключённого к точкам A2 и A3, после отключения резистора. Ответ представьте в милликулонах (мКл) и округлите до десятых. За правильный ответ даётся 1 очко.

**Ответ:** 4

## 10. Задача 10

Введите модуль электрического заряда на пластинах конденсатора, подключённого к точкам A3 и A4, после отключения резистора. Ответ представьте в милликулонах (мКл) и округлите до десятых. За правильный ответ даётся 1 очко.

**Ответ:** 2

## 11. Задача 11

Введите максимальную силу электрического тока через резистор. Ответ представьте в миллиамперах и округлите до десятых. За правильный ответ даётся 1 очко.

**Ответ:** 3

## 12. Задача 12

Введите ответ для количества теплоты, выделившегося на резисторе. Ответ представьте в миллиджоулях и округлите до десятых. За правильный ответ даётся 1 очко.

**Ответ:** 6

## Возможные решения задач, критерии оценок и присуждения грамот

*авторы задач: С. Д. Варламов, И. В. Маслов, М. Ю. Ромашка*

Заочное задание (ноябрь) состоит из пяти задач. За решение каждой задачи участник получает до +4 очков по результатам автоматической проверки ответов и до +6 очков на основании проверки развернутого ответа. Всего участник может получить до 50 очков.

Участники, набравшие по итогам ноябрьского заочного задания не менее 35 очков из 50, награждаются грамотами призера нулевого тура. Участники, набравшие не менее 15 очков из 50, награждаются грамотами за успешное выполнение ноябрьского заочного задания по 11-му классу.

**Задача 1.** В солнечную и безоблачную, но ветреную погоду школьник Ярослав запускает непрозрачный воздшный шарик, заполненный гелием. Двигаясь горизонтально со скоростью $u = 2$ м/с, Ярослав обнаружил, что шарик (в системе отсчёта, связанной с Ярославом) поднимается вертикально вверх со скоростью $v = 1$ м/с. Солнечные лучи падают на горизонтальную поверхность под углом $45°$ к вертикали. С какой скоростью может двигаться по земле тень шарика?

**Возможное решение.** Введем систему координат таким образом, чтобы ось $z$ была направлена вертикально вверх, начало координат было на поверхности земли, а луч света падал в плоскости, проходящей через оси $x$ и $z$.

Пусть $(x_ш, y_ш, z_ш)$ — координаты шарика. Тогда, как вытекает из рисунка, $x$-координата тени равна

$$x_т = x_ш + z_ш.$$

При этом $y$-координата тени равна $y_ш$.


Из полученных соотношений для координат тени и шарика выразим проекции скорости тени через проекции скорости шарика:

$$v_{тx} = v_{шx} + v_{шz}, \qquad v_{тy} = v_{шy}.$$

Запишем выражения для проекций скорости основе условий задачи. Если Ярослав движется по поверхности земли под углом $\alpha$ к оси $x$, его проекции скорости составляют $(v_{Яx} = u\cos\alpha; v_{Яy} = u\sin\alpha)$. Поскольку шарик движется относительно Ярослава по вертикали со скоростью $v$, проекции скорости шарика составляют

$$(v_{шx} = u\cos\alpha; v_{шy} = u\sin\alpha; v_{шz} = v).$$

Проекции скорости тени, уже представленные выше через проекции скорости шарика, оказываются равны

$$(v_{тx} = u\cos\alpha + v; v_{тy} = u\sin\alpha).$$

Найдем квадрат скорости тени:

$$v_{\text{т}}^2 = (u\cos\alpha + v)^2 + (u\sin\alpha)^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha.$$

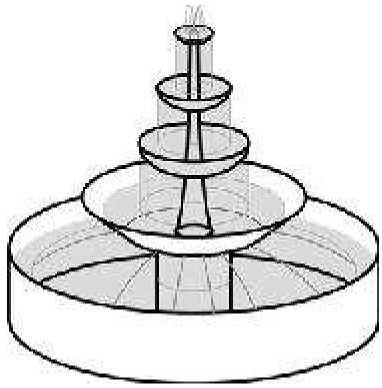
Он минимален при $\cos\alpha = -1$ и максимален при $\cos\alpha = 1$, пробегая значения в диапазоне от $(u-v)^2$ до $(u+v)^2$. Следовательно, модуль скорости тени может пробегать значения в диапазоне от $|u-v|$=1 м/с до $u+v$=3 м/с.

**Ответ:** модуль скорости тени может пробегать значения в диапазоне от $|u-v|$=1 м/с до $u+v$=3 м/с.

**Критерии оценок развернутого решения.** За полное решение задачи участник получает 6 очков. За решение, доведенное до правильного ответа, но с недочетами в доказательстве (не все возможности рассмотрены) участник получает 4 очка. Если участник не довел решение до правильного ответа, он может получить до 2 утешительных очков по следующим основаниям: правильное использование формулы для скорости, времени, расстояния; правильное соотношение для координат тени и шарика.

**Критерии оценок (автоматическая проверка ответов).** За правильные ответы на вопросы о максимальной и минимальной скорости тени участник получает по +2 очка.

**Задача 2.** В фонтан, изображённый на рисунке, по центральной трубке площадью поперечного сечения $S = 50$ см$^2$ подаётся вода, которая вертикально бьёт из отверстия, расположенного на уровне воды верхнего сосуда, на высоту $h = 20$ см. Три верхних сосуда полностью заполнены водой, которая стекает из одного в другой, переливаясь через края сосудов. Четвёртый сосуд (считая сверху) — это широкая чаша. Чтобы поддерживать в ней почти постоянный уровень воды в течение длительного времени, по периметру чаши у её дна каждые $\tau = 2$ мин на некоторый промежуток времени открываются горизонтальные трубки общей площадью $S_0 = 900$ см$^2$. Из этих трубок вода бьёт на расстояние $L = 50$ см, считая по горизонтали, и попадает в пятый сосуд, где с помощью сливных каналов поддерживается постоянный уровень воды. Каждый следующий уровень воды расположен ниже предыдущего на $H = 45$ см (расстояния измеряются между поверхностями воды). Какую скорость имеет вода при попадании в третий сосуд? На какой промежуток времени открываются горизонтальные трубки через каждые 2 минуты? Сопротивлением воздуха и вязкостью воды можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$.



**Возможное решение.** Начиная падение из второго сосуда в третий, вода имеет практически нулевую скорость. Следовательно, движение воды можно рассматривать как свободное падение с высоты $H$ без начальной скорости — в конце такого падения тело приобретает скорость $\sqrt{2gH}$. Это и будет скорость воды при попадании в третий сосуд.

Чтобы струя воды била вверх на высоту $h$, ее скорость на уровне отверстия должна быть равна $\sqrt{2gh}$. Следовательно, за время $\tau$ в фонтан попадет объем воды, равный $S\sqrt{2gh}\tau$.

Пусть горизонтальные трубки открыты. Время движения струи воды без начальной вертикальной скорости с высоты $H$ составляет $\sqrt{2H/g}$. За это время по горизонтали проходится расстояние $L$. Поскольку горизонтальная скорость при движении в поле тяжести постоянна, она равна $L/\sqrt{2H/g}$. Именно с этой скоростью вода вытекает из горизонтальных трубок. Поэтому объем воды, вытекающий в единицу времени из трубок, составляет $S_0 \cdot \frac{L}{\sqrt{2H/g}}$.

Чтобы из трубок вытек объем $S\sqrt{2gh}\tau$, попавший в фонтан, трубки надо открыть на время

$$t_1 = S\sqrt{2gh}\tau : S_0 \cdot \frac{L}{\sqrt{2H/g}} = \frac{2S\sqrt{hH}}{S_0 L}\tau = 8 \text{ с.}$$

**Ответ:** горизонтальные трубки надо открыть на время $t_1 = \frac{2S\sqrt{hH}}{S_0 L}\tau = 8$ с.

**Критерии оценок развернутого решения.** За правильный расчет скорости воды при попадании в третий сосуд участник получает +2 очка. Участник, обоснованно получивший правильный ответ (хотя бы в виде формулы) на вопрос о времени, получает +4 очка. Если участник не довел решение до правильного ответа, он может получить до +2 утешительных очков по следующим основаниям: наличие идеи о равенстве объемов втекающей и вытекающей воды; правильный расчет скорости воды, вытекающей из горизонтального отверстия.

**Критерии оценок (автоматическая проверка ответов).** За правильный ответ на вопрос о скорости воды участник получает +1 очко. Правильный ответ на вопрос о промежутке времени оценивается в +3 очка.

**Задача 3.** Школьница Алиса проводит опыты с двумя одинаковыми стаканами. Первый стакан Алиса заполнила водой комнатной температуры $t_0 = 20°C$ до половины объёма, а затем долила столько же воды с температурой $t_1 = 30°C$. Алиса была уверена, что установившаяся температура будет равна 25°C; однако она оказалась равной $t_2 = 23°C$. Как могла рассуждать Алиса и почему конечная температура оказалась другой? Какая температура $t_3$ установится во втором стакане, если Алиса заполнит его сначала водой комнатной температуры на одну треть и затем дополнит доверху водой температуры $t_1 = 30°C$? Потерями тепла в окружающее пространство за время установления температуры можно пренебречь.

**Возможное решение.** Пусть $m$— масса воды в полном стакане, $c$— удельная теплоемкость воды, $C$— теплоемкость стакана (произведение массы стакана на удельную теплоемкость материала, из которого изготовлен стакан).

Алиса могла предположить, что теплоемкостью стакана можно пренебречь. Она могла рассчитать конечную температуру $t$ следующим образом. Вода, налитая в стакан изначально, получила количество теплоты $cm/2 \cdot (t - t_0)$; вода, налитая в стакан дополнительно, отдала количество теплоты $cm/2 \cdot (t_1 - t)$. Поскольку количества теплоты одинаковы, $cm/2 \cdot (t - t_0) = cm/2 \cdot (t_1 - t)$ и $t = (t_1 + t_2)/2 = 25°C$.

Установившаяся температура могла оказаться другой из-за того, что стакан имеет конечную теплоемкость. В этом случае стакан и вода, налитая изначально, получают количество теплоты $(C + cm/2) \cdot (t_2 - t_0)$, а вода, налитая дополнительно, отдает количество теплоты $cm/2 \cdot (t_1 - t_2)$. Приравнивая количества теплоты, составим уравнение

$$(C + cm/2) \cdot (t_2 - t_0) = cm/2 \cdot (t_1 - t_2),$$

на основе которого можно найти отношение теплоемкости стакана к теплоемкости воды: $(C+cm/2) \cdot 7 = cm/2 \cdot 3$ и

$$C = 2cm/3.$$

Во втором опыте стакан и вода, налитая изначально, получают количество теплоты $(C + cm/3) \cdot (t_3 - t_0)$, а вода, налитая дополнительно, отдает количество теплоты $2cm/3 \cdot (t_1 - t_3)$. Приравнивая количества теплоты, составим уравнение

$$(C + cm/3) \cdot (t_3 - t_0) = 2cm/3 \cdot (t_1 - t_3).$$

Подставляя найденное выше значение теплоемкости стакана, приведем соотношение к виду:

$$3(t_3 - t_0) = 2(t_1 - t_3).$$

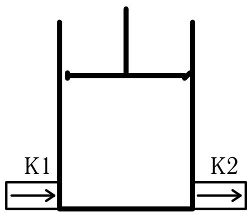
Отсюда $t_3 = 24°C$.

**Ответ:** конечная температура в опыте со вторым стаканом составляет $t_3 = 24°C$.

**Критерии оценок развернутого решения.** Участник, который привел в решении возможное рассуждение Алисы, получает +1 очко. За объяснение, почему конечная температура оказалась другой, участник получает +1 очко. За решение, доведенное до правильного ответа на вопрос о температуре во втором опыте, участник получает +4 очка. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить до +2 утешительных очков по следующим основаниям: использовано уравнение теплового баланса; использована формула, связывающая количество теплоты, удельную теплоемкость, массу и изменение температуры.

**Критерии оценок (автоматическая проверка ответов).** За правильный ответ на вопрос задачи участник получает +4 очка.

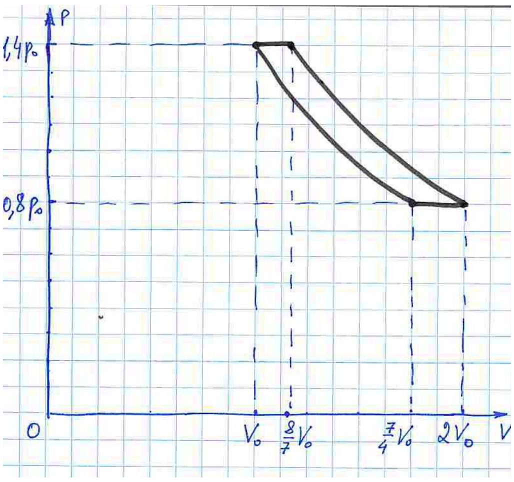
**Задача 4.** В цилиндре с поршнем, где находится воздух, имеются два клапана: впускной К1 и выпускной К2. Система клапанов работает таким образом, что давление в цилиндре поддерживается в промежутке от $0{,}8p_0$ до $1{,}4p_0$, где $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па— атмосферное давление: как только давление в цилиндре падает ниже $0{,}8p_0$, открывается впускной клапан, и давление становится равным $0{,}8p_0$; при превышении давлением значения $1{,}4p_0$ открывается выпускной клапан, и давление падает до $1{,}4p_0$. Поршень совершает очень медленные колебания, в процессе которых объём воздуха в цилиндре изменяется в пределах от $V_0$ до $2V_0$, где $V_0 = 22{,}4$ л. Постройте график зависимости давления воздуха в цилиндре от его объёма в данном процессе. Объясните Ваше построение. Считайте, что с момента начала опыта уже прошло несколько колебаний. Определите наименьшее и наибольшее число молей воздуха в цилиндре. Температура постоянна и равна $T_0 = 273$ К. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).




**Возможное решение.** При первом прохождении состояния с объемом $V_0$ давление может принимать значение в промежутке от $0,8p_0$ до $1,4p_0$. Если бы клапаны не открывались, при увеличении объема до $2V_0$ давление, по закону Бойля-Мариотта, упало бы до значения от $0,4p_0$ до $0,7p_0$ — клапан бы все равно открылся. Таким образом, давление при увеличении объема до $2V_0$ оказывается равным $0,8p_0$.

При сжатии давление сначала возрастает обратно пропорционально объему (по закону Бойля-Мариотта), а затем, по достижении значения $1,4p_0$ (объем при этом равен $2V_0 \cdot 0,8p_0 : (1,4p_0) = 8V_0/7$, открывается клапан, препятствующий дальнейшему увеличению давления. В состоянии с объемом $V_0$ давление окажется равным $1,4p_0$. При расширении давление сначала будет убывать обратно пропорционально объему, затем, по достижении значения $0,8p_0$ (при объеме $V_0 \cdot 1,4p_0 : (0,8p_0) = 7V_0/4$), откроется клапан, и давление далее будет равно $0,8p_0$. Далее цикл будет повторяться.

График процесса после хотя бы одного колебания изображен на рисунке.



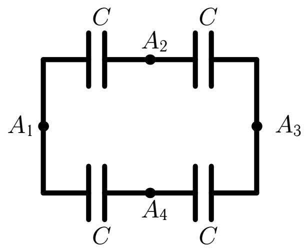

Количество вещества $\nu$ связано с давлением $p$ и объемом $V$ соотношением $pV = \nu RT_0$. Произведение давления на объем пробегает значения в промежутке от $1,4p_0V_0$ до $1,6p_0V_0$. Следовательно, количество вещества $\nu$ принимает значения в промежутке от $1,4\nu_0$ до $1,6\nu_0$, где $\nu_0 = p_0V_0/(RT_0) = 1$ моль.

**Ответ:** Количество вещества в цилиндре принимает значения от 1,4 моль до 1,6 моль; зависимость давления от объема приведена на графике.

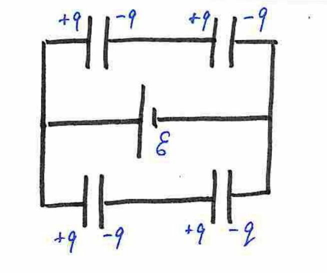
**Критерии оценок развернутого решения.** Участник, обосновавший значения давлений $0,8p_0$ и $1,4p_0$ в крайних точках графика $V = 2V_0$ и $V = V_0$, получает +1 очко. Участник, обосновавший, на каких этапах процесса клапаны будут закрыты, а на каких открыты, получает +1 очко. За построение верного графика участник получает +2 очка (при наличии в целом правильного графика с недочетами +1 очко). Расчет максимального и минимального значений количества вещества оценивается в +2 очка в совокупности.

**Критерии оценок (автоматическая проверка ответов).** За правильные ответы на вопросы о максимальном и минимальном количестве вещества участник получает по +2 очка.

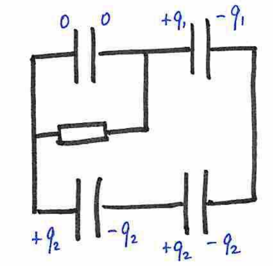
**Задача 5.** На рисунке изображена схема электрической цепи, составленной из четырёх первоначально незаряженных конденсаторов ёмкости $C$. Сначала к точкам $A_1$ и $A_3$ подключили батарейку с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением $r$. Когда ток через батарейку стал пренебрежимо малым, батарейку отключили, а к точкам $A_1$ и $A_2$ подключили резистор $R$, который также отключили, когда ток через него стал пренебрежимо мал. Найдите электрические заряды на каждой из пластин конденсаторов (а) после отключения батарейки; (б) после отключения резистора. Каким был максимальный электрический ток через резистор в данном процессе? Какое количество теплоты выделилось на резисторе? Получите ответы в виде общих формул и в частном случае $\mathcal{E} = 6$ В, $r = 1$ Ом, $C = 1$ мФ, $R = 1$ кОм.




**Возможное решение.** (а) Когда ток через батарейку становится пренебрежимо малым, на пластинах конденсаторов в силу симметрии схемы устанавливаются заряды $\pm q$, как показано на рисунке. Поскольку ЭДС батарейки $\mathcal{E}$ равна сумме напряжений на двух конденсаторах (каждое из напряжений $q/C$), имеем: $\mathcal{E} = 2q/C$ и $q = C\mathcal{E}/2$.




(б) Отметим на рисунке заряды на конденсаторах, когда ток через резистор становится пренебрежимо малым. Заряд конденсатора, подключенного к точкам $A_2$ и $A_3$, обозначим через $q_1$, заряды двух конденсаторов, подключенных к точке $A_4$ — через $q_2$. Учтем, что напряжение и заряд на конденсаторе, подключенном к точкам $A_1$ и $A_2$, обращаются в нуль.




Разность потенциалов между точками $A_1$ и $A_3$ равна, с одной стороны, $q_1/C$, а с другой стороны $2q_2/C$. Следовательно, $q_1 = 2q_2$.

Общий заряд на пластинах, подключенных к точке $A_3$, должен сохраняться, поэтому $q_1 + q_2 = 2q$.

Из двух полученных соотношений для зарядов находим: $q_1 = 4q/3 = 2C\mathcal{E}/3$, $q_2 = 2q/3 = C\mathcal{E}/3$.

(в) Поскольку заряд на конденсаторе, подключенном к резистору, все время уменьшался, максимальная сила тока через резистор наблюдалась в момент подключения резистора и была равна отношению напряжения на конденсаторе $q/C = \mathcal{E}/2$ к сопротивлению резистора $R$: $I_{\max} = \mathcal{E}/(2R)$.

(г) Энергия конденсаторов до подключения резисторов равна $4 \cdot C(\mathcal{E}/2)^2/2 = C\mathcal{E}^2/2$, а после подключения — равна $C(2\mathcal{E}/3)^2/2 + 2C(\mathcal{E}/3)^2/2 = C\mathcal{E}^2/3$. Следовательно, на резисторе выделится количество теплоты $C\mathcal{E}^2/2 - C\mathcal{E}^2/3 = C\mathcal{E}^2/6$.

**Ответ:** электрические заряды на обкладках конденсаторов на различных этапах приведены на рисунках, причем $q = C\mathcal{E}/2 = 3$ мКл, $q_1 = 4q/3 = 4$ мКл, $q_2 = 2q/3 = 2$ мКл; максимально возможная сила тока через резистор составляет $I_{\max} = \mathcal{E}/(2R) = 3$ мА; на резисторе выделяется количество теплоты $C\mathcal{E}^2/6 = 6$ мДж.

**Критерии оценок развернутого решения.** Участник получает +1 очко за правильно выполненный пункт (а) и +2 очка за правильно выполненный пункт (б). Участник, получивший правильный ответа на вопрос о максимальной силе тока, получает +1 очко. Расчет количества теплоты оценивается в +2 очка.

**Критерии оценок (автоматическая проверка ответов).** Участник получает по +1 очку за правильные ответы на вопросы: о модуле заряда конденсатора, подключенного к точкам A2 и A3, после отключения резистора; о модуле заряда конденсатора, подключенного к точкам A3 и A4, после отключения резистора; о максимальной силе электрического тока через резистор; о количестве теплоты, выделившемся на резисторе.

## 1. Задача 1

В прилагаемом файле (см. ниже) приведено декабрьское заочное задание для 11 класса. Распечатайте бланк, скачанный при регистрации на очный нулевой тур Московской олимпиады по физике, в достаточном количестве экземпляров. На страницах бланка от руки напишите развёрнутые решения прилагаемых задач. Сфотографируйте страницы с Вашими решениями так, чтобы текст и номер бланка были чётко видны. Создайте архив фотографий с решениями и прикрепите к заданию. Развёрнутые решения задач оцениваются из 30 очков (по 6 очков за развёрнутое решение каждой задачи).

## 2. Задача 2

На каком минимальном расстоянии от точки B может оказаться Вася после переправы в задаче 1 в случае (а) при u = 0,8 м/с, v = 1 м/с, L = 100 м? Ответ представьте в метрах и округлите до десятых. Единицы измерения указывать не нужно. За правильный ответ даётся 1 очко.

**Ответ:** `0`

## 3. Задача 3

На каком минимальном расстоянии от точки B может оказаться Вася после переправы в задаче 1 в случае (б) при u = 1 м/с, v = 0,8 м/с, L = 100 м? Ответ представьте в метрах и округлите до десятых. Единицы измерения указывать не нужно. За правильный ответ даётся 3 очка.

**Ответ:** `75`

## 4. Задача 4

Чему равен тангенс угла, под которым наклонено к горизонту дно сосуда с кубиком (задача 2)? Ответ округлите до сотых. За правильный ответ даётся 2 очка.

**Ответ:** `0,5`

## 5. Задача 5

Чему равен тангенс угла, под которым наклонено к горизонту дно сосуда с полусферой (задача 2)? Ответ округлите до сотых. За правильный ответ даётся 2 очка.

**Ответ:** `1,12`

## 6. Задача 6

Чему равна работа, совершённая газом, в задаче 3? Ответ представьте в килоджоулях и округлите до десятых. За правильный ответ даётся 4 очка.

**Ответ:** `10`

## 7. Задача 7

Чему равна ЭДС батарейки в задаче 4? Ответ представьте в вольтах и округлите до десятых. За правильный ответ даётся 4 очка.

**Ответ:** 28

## 8. Задача 8

Чему равна кинетическая энергия протона в задаче 5 в случае (а) при R = 1 м, E = 1 кВ/м, B = 0? Ответ представьте в электрон-вольтах и округлите до десятых. За правильный ответ даётся 1 очко.

**Ответ:** 500

## 9. Задача 9

Чему равна максимальная кинетическая энергия протона в задаче 5 в случае (б) при R = 1 м, E = 1 кВ/м, B = 0,1 Тл? Ответ представьте в электронвольтах и округлите до второй значащей цифры. За правильный ответ даётся 1 очко.

**Ответ:** 470000

## 10. Задача 10

Чему равна минимальная кинетическая энергия протона в задаче 5 в случае (б) при R = 1 м, E = 1 кВ/м, B = 0,1 Тл? Ответ представьте в электрон-вольтах и округлите до второй значащей цифры. За правильный ответ даётся 2 очка.

**Ответ:** 0,53

*Московская олимпиада школьников по физике, 2014/15, нулевой тур,*
*заочное задание (декабрь), 11 класс*

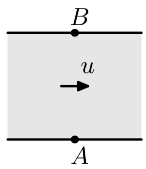
## Возможные решения задач. Критерии оценок и присуждения грамот

*Авторы задач: Л.И. Арзамасский, Е.А. Мажник, И.В. Маслов, О.Ю. Шведов*

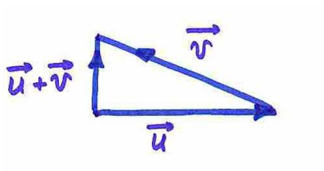
Заочное задание (декабрь) состоит из пяти задач. За решение каждой задачи участник получает до +4 очков по результатам автоматической проверки ответов и до +6 очков на основании проверки развёрнутого ответа. Всего участник может получить до 50 очков.

Участники, набравшие по итогам декабрьского заочного задания не менее 35 очков из 50, награждаются грамотами призера нулевого тура. Участники, набравшие не менее 15 очков из 50, награждаются грамотами за успешное выполнение декабрьского заочного задания по 11 классу.

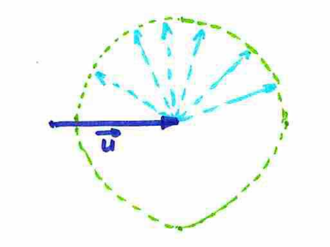
**Задача 1.** Школьник Вася, находящийся в точке $A$, собирается переплыть на противоположный берег реки и оказаться как можно ближе к точке $B$, расположенной точно напротив точки $A$. Ширина реки равна $L$, скорость течения реки равна $u$, скорость Васи в стоячей воде равна $v$. Определите, на каком минимальном расстоянии от точки $B$ может оказаться Вася после переправы. Объясните Ваш ответ. Изобразите на рисунке векторы скорости течения реки, скорости Васи в стоячей воде и скорости Васи относительно берега при оптимальном способе переправы. Решите задачу в общем случае и в частных случаях (а) $u = 0,8$ м/с, $v = 1$ м/с, $L = 100$ м; (б) $u = 1$ м/с, $v = 0,8$ м/с, $L = 100$ м.



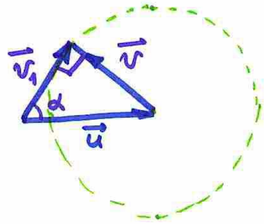

**Возможное решение.** Если скорость Васи больше скорости течения реки (в частности, в случае (а)), он может попасть в точку $B$. Векторы скоростей течения реки $\vec{u}$ и Васи относительно воды $\vec{v}$ и Васи относительно берега $\vec{u} + \vec{v}$ приведены на рисунке:



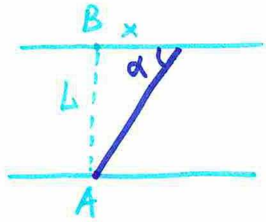

Пусть скорость Васи меньше скорости течения реки. Изобразим на рисунке вектор скорости течения реки $\vec{u}$. Вектор скорости Васи $\vec{v}$ относительно воды имеет фиксированную величину, но его направление может быть любым. Возможные варианты расположения вектора $\vec{v}$ изображены пунктиром на рисунке. Конец данного вектора лежит на окружности:




Смещение Васи относительно точки $B$ окажется минимальным, если угол $\alpha$ между скоростью Васи относительно берега $\vec{v}_1 = \vec{u} + \vec{u}$ окажется как можно ближе к $90°$, при этом вектор $\vec{v}_1$, направленный по касательной к окружности, окажется перпендикулярен вектору $\vec{v}$, направленному вдоль радиуса окружности:




Учитывая, что по теореме Пифагора $|\overrightarrow{v}_1| = \sqrt{u^2 - v^2}$, имеем: $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{u^2 - v^2}/v$. При переправе Вася сместится относительно точки $B$ на расстояние $x = L\operatorname{ctg}\alpha = L\sqrt{u^2 - v^2}/v$:



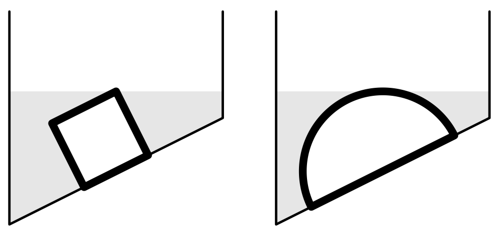

В случае (б) смещение Васи относительно точки $B$ равно $x = 75$ м.

**Ответ:** При $v > u$ (в том числе в случае (а)) искомое минимальное расстояние равно нулю. При $v < u$ (в том числе в случае (б)) Вася может оказаться от точки $B$ на минимальном расстоянии $x = L\sqrt{u^2 - v^2}/v$. В случае (б) $x = 75$ м.

**Критерии оценок развёрнутого решения.** Участник, правильно указавший векторы скоростей при $v > u$, получает +2 очка. Участник, правильно изобразивший векторы скоростей $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}_1$ при $v < u$ (с указанием перпендикулярности векторов $\overrightarrow{v}_1$ и $\overrightarrow{v}$), получает +2 очка. Участник, обоснованно получивший правильную формулу для $x$ при $v < u$, получает +2 очка.

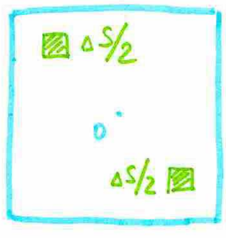
**Критерии оценок (автоматическая проверка ответов).** Участник получает +1 очко за правильный ответ на вопрос (а) и +3 очка за правильный ответ на вопрос (б).

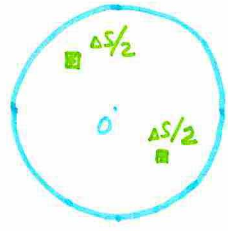
**Задача 2.** Школьница Ирина проводит опыты с сосудами с наклонным дном. На дне первого сосуда — кубик, на дне второго сосуда — полусфера. Уровень воды в каждом сосуде точно совпадает с положением наивысшей точки кубика или полусферы. Оказалось, что сила давления, действующая со стороны воды как на кубик, так и на полусферу (без учёта атмосферного давления), направлена горизонтально. Под каким углом к горизонту наклонено дно первого сосуда? Второго сосуда? Вода под кубик и полусферу не подтекает.



**Возможное решение.** Пусть $\rho$ — плотность жидкости, $g$ — ускорение свободного падения.

Получим сначала формулу для силы давления жидкости на плоскую фигуру (квадрат или круг) площадью $S$, имеющую центр симметрии $O$ на глубине $H$ и наклонённую под углом к горизонту. Выделим два маленьких участка площадью $\Delta S/2$ каждый, симметричные относительно точки $O$: один — на глубине $H + y$, другой — на глубине $H - y$:

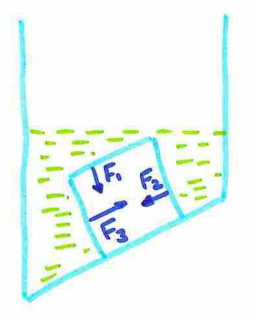


На эти участки действуют силы давления $\rho g(H+y)\Delta S/2$ и $\rho g(H-y)\Delta S/2$ — в сумме $\rho g H\Delta S$. Учитывая вклад от всех участков, находим, что сила давления на рассматриваемую плоскую фигуру составляет $\rho g H S$.

Изложим теперь два способа решения задачи о кубике. Пусть $a$ — длина ребра куба, тогда площадь грани куба составляет $a^2$. Обозначим через $\alpha$ угол наклона дна сосуда к горизонту. В плоскости рисунка направим ось $x$ горизонтально, ось $y$ — вертикально вверх.

*Задача о кубике. Первый способ.* Изобразим на рисунке силы давления, действующие на грани кубика. Силы, действующие на грани, параллельные плоскости рисунка, компенсируются — их можно не учитывать.

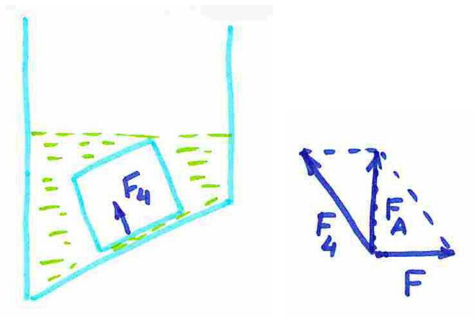



Учитывая, что центр верхней грани находится на глубине $a/2\cdot\sin\alpha$, запишем: $F_1=\rho g\cdot a/2\cdot\sin\alpha\cdot a^2$. Аналогично: $F_2=\rho g\cdot a/2\cdot\cos\alpha\cdot a^2$ и $F_3=\rho g\cdot(a\sin\alpha+a/2\cdot\cos\alpha)\cdot a^2$. Сумма проекций этих сил на ось $y$ равна:

$$F_y=(F_3-F_2)\sin\alpha-F_1\cos\alpha=\rho g\cdot a\sin\alpha\cdot a^2\cdot\sin\alpha-\rho g\cdot a/2\cdot\sin\alpha\cdot a^2\cdot\cos\alpha.$$

Эта сумма обращается в нуль при $\sin\alpha=1/2\cdot\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha=1/2$.

*Задача о кубике. Второй способ.* Пусть $\vec{F}$ — равнодействующая сил давления, действующих на кубик. Если под дно кубика будет подтекать вода, то сила $\vec{F}$ вместе с силой $\vec{F_4}$, действующей на дно кубика, будут образовывать силу Архимеда $\vec{F_A}$: $\vec{F_A}=\vec{F}+\vec{F_4}$.




Учитывая, что центр нижней грани находится на глубине $a\cos\alpha+a/2\cdot\sin\alpha$, получим: $F_4=\rho g\cdot(a\cos\alpha+a/2\cdot\sin\alpha)\cdot a^2$. Горизонтальность силы $\vec{F}$ означает, что $F_4\cos\alpha=F_A$, или

$$\rho g\cdot(a\cos\alpha+a/2\cdot\sin\alpha)\cdot a^2\cdot\cos\alpha=\rho g a^3.$$

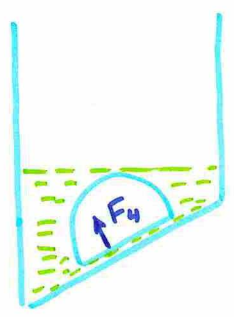
Преобразуя данное соотношение, находим:

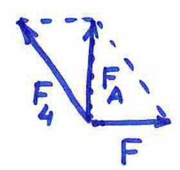
$$(\cos\alpha+1/2\cdot\sin\alpha)\cdot\cos\alpha=1,$$

или $\operatorname{tg}\alpha=1/2$.

*Задача о полусфере.* Пусть $R$ — радиус полусферы, $\beta$ — угол наклона дна сосуда к горизонту.

Задачу о полусфере удобнее решать способом, аналогичным второму способу решения задачи о кубике. Пусть $\vec{F}$ — равнодействующая сил давления, действующих на полусферу. Представим, что под дно полусферы подтекает вода; тогда сила $\vec{F}$ вместе с силой $\vec{F_4}$, действующей на дно полусферы, будут образовывать силу Архимеда $\vec{F_A}$: $\vec{F_A}=\vec{F}+\vec{F_4}$.




Учитывая, что центр дна полусферы находится на глубине $R$, а площадь дна полусферы $\pi R^2$, получим: $F_4 = \rho g R \cdot \pi R^2$. Горизонтальность силы $\overrightarrow{F}$ означает, что $F_4 \cos\beta = F_A$, или

$$\rho g R \cdot \pi R^2 \cdot \cos\beta = \rho g \cdot \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Преобразуя данное соотношение, находим:

$$\cos\beta = \frac{2}{3},$$

или $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{5}}{2} \simeq 1,12$.

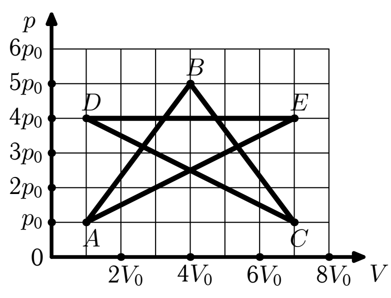
**Ответ:** Дно первого сосуда наклонено под углом, тангенс которого равен 1/2. Дно второго сосуда наклонено под углом, косинус которого равен 2/3.

**Критерии оценок развёрнутого решения.** Участник, обоснованно получивший любым из способов правильный ответ к задаче о кубике, получает +2 очка. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить +1 очко, если правильно изобразил на рисунке силы, действующие на кубик.

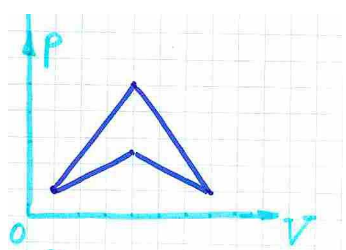
Участник, обоснованно получивший правильный ответ к задаче о полусфере, получает +4 очка. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить +1 очко, если правильно изобразил на рисунке силы, действующие на полусферу.

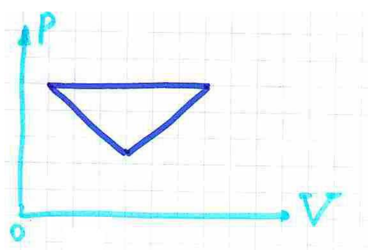
**Критерии оценок (автоматическая проверка ответов).** Участник получает +2 очка за правильный ответ на первый вопрос и +2 очка за правильный ответ на второй вопрос.

**Задача 3.** Над идеальным газом совершают циклический процесс, который на $pV$-диаграмме изображается в виде звезды, соединяющей точки $A(p_0; V_0)$, $B(5p_0; 4V_0)$, $C(p_0; 7V_0)$, $D(4p_0; V_0)$, $E(4p_0; 7V_0)$ и $A(p_0; V_0)$. Как выразить работу $A$, совершённую газом за цикл, через площади образовавшихся на рисунке треугольников и пятиугольника? Выразите эту работу через параметры $p_0$ и $V_0$. Рассчитайте численное значение работы, если минимальная температура газа равна $T_0 = 100$ К, а количество вещества составляет $\nu = 1$ моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

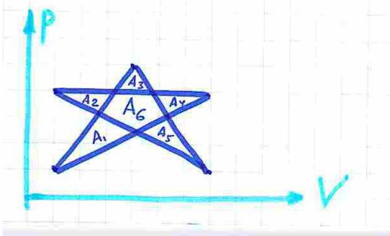



**Возможное решение.** Представленный на рисунке цикл можно представить как совокупность двух циклов:




Работа в каждом из этих циклов равна площади фигуры, ограниченной циклом. При сложении работ получаем, что площади треугольников надо учитывать с коэффициентом 1, а площадь пятиугольника — с коэффициентом 2: $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + 2A_6$.




Однако рассчитывать работу удобнее, складывая работы на отдельных участках $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $EA$. На каждом из участков работа газа равна площади трапеции под графиком. По формуле для площади трапеции, получим: $A_{AB} = A_{BC} = 9p_0V_0$, $A_{CD} = A_{EA} = -15p_0V_0$, $A_{DE} = 24p_0V_0$. Складывая работы, находим: $A = 12p_0V_0$.

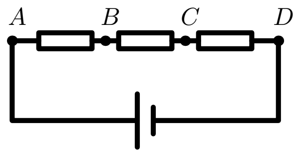
Поскольку как давление, так и объём минимальны в точке $A$, температура газа, пропорциональная произведению давления на объём, также минимальна в этой точке. Согласно уравнению идеального газа, $p_0V_0 = \nu RT_0$. Отсюда $A = 12\nu RT_0 = 10$ кДж.

**Ответ:** Работа газа соответствует сумме площадей треугольников и удвоенной площади пятиугольника. Она равна $A = 12\nu RT_0 = 10$ кДж.

**Критерии оценок развёрнутого решения.** Участник получает +2 очка за правильное выражение работы газа через площади треугольников и пятиугольника, +2 очка за обоснованное выражение работы газа через $p_0$ и $V_0$, +1 очко за обоснование минимальности температуры в точке $A$ и +1 очко за обоснованное выражение работы газа через $T_0$.

**Критерии оценок (автоматическая проверка ответов).** Участник получает +4 очка за правильный ответ на вопрос о работе газа.

**Задача 4.** Школьник Станислав проводит опыты с электрической цепью, состоящей из трёх одинаковых резисторов и батарейки. Подключив вольтметр к клеммам $A$ и $B$, Станислав записал показания прибора $U_{AB} = 4$ В. Станислав был уверен, что показание вольтметра при подключении к клеммам $A$ и $C$ составит 8 В, а при подключении к клеммам $A$ и $D$ будет равно 12 В. Действительно, одно из показаний прибора совпало с предсказаниями Станислава: $U_{AD} = 12$ В. Однако второе показание оказалось неожиданным: $U_{AC} = 7$ В. Как мог рассуждать Станислав? Почему одно из показаний прибора было предсказано неправильно? Какую информацию о характеристиках приборов можно получить на основе проведённых измерений? Считайте, что сила тока через вольтметр пропорциональна напряжению на нём.

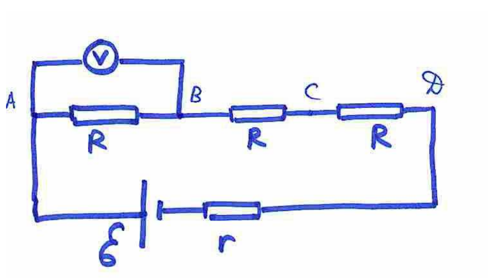



**Возможное решение.** Пусть $\mathcal{E}$ — ЭДС батарейки.

Станислав мог считать батарейку и вольтметр идеальными. Поскольку сопротивления резисторов и силы тока через них одинаковые, напряжения на резисторах также равны между собой. Поскольку их сумма равна $\mathcal{E}$, каждое из напряжений равно $\mathcal{E}/3$. Следовательно, $U_{AB} = \mathcal{E}/3$, $U_{AC} = 2\mathcal{E}/3$, $U_{AD} = \mathcal{E}$. При $U_{AB} = 4$ В получим $U_{AC} = 8$ В, $U_{AD} = 12$ В.

Однако батарейка и вольтметр вполне могут и не быть идеальными. Пусть $R$ — сопротивление каждого из резисторов, $r$ — внутреннее сопротивление батарейки, $R_V$ — сопротивление вольтметра. Найдём показания вольтметра при подключении к разным клеммам схемы.

Пусть вольтметр подключён к клеммам $A$ и $B$. Изобразим схему электрической цепи, заменив неидеальную батарейку на последовательно соединённые идеальную батарейку и сопротивление:




Сила тока через вольтметр равна $U_{AB}/R_V$; сила тока через резистор, параллельный вольтметру, равна $U_{AB}/R$; следовательно, сила тока через батарейку равна:

$$I = \frac{U_{AB}}{R_V} + \frac{U_{AB}}{R}.$$

Напряжение между точками $B$ и $E$ составляет, с одной стороны, $I(2R+r)$, а с другой стороны, $\mathcal{E} - U_{AB}$. Отсюда

$$I = \frac{\mathcal{E} - U_{AB}}{2R+r}.$$

Из двух соотношений для $I$ получим:

$$\frac{U_{AB}}{R_V} + \frac{U_{AB}}{R} = \frac{\mathcal{E} - U_{AB}}{2R+r}.$$

Отсюда

$$\frac{\mathcal{E}}{U_{AB}} = (2R+r)\left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R}\right) + 1.$$

Аналогично получим:

$$\frac{\mathcal{E}}{U_{AC}} = (R+r)\left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{2R}\right) + 1;$$

$$\frac{\mathcal{E}}{U_{AD}} = r\left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{3R}\right) + 1.$$

Для анализа этой системы удобно учесть пропорцию $U_{AB} : U_{AC} : U_{AD} = 4 : 7 : 12$. В частности, из свойства $\mathcal{E}/U_{AB} = 3\mathcal{E}/U_{AD}$ получим:

$$(2R+r)\left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R}\right) + 1 = 3r\left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{3R}\right) + 3,$$

или

$$R = r.$$

Также учтём свойство $4\mathcal{E}/U_{AB} = 7\mathcal{E}/U_{AC}$:

$$4 \cdot \left((2R+r)\left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R}\right) + 1\right) = 7 \cdot \left((R+r)\left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{2R}\right) + 1\right).$$

Поскольку $R = r$, преобразуем свойство как

$$4 \cdot \left(3R\left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R}\right) + 1\right) = 7 \cdot \left(2R\left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{2R}\right) + 1\right).$$

Из него получим $R_V = R$.

Таким образом, данные задачи позволяют сделать вывод, что сопротивления батарейки, резисторов и вольтметра одинаковые (батарейка и вольтметр, таким образом, очень далеки от идеальности). В этом случае $U_{AB} = \mathcal{E}/7$, $U_{AC} = \mathcal{E}/4$, $U_{AD} = 3\mathcal{E}/7$. Из данных задачи получаем $\mathcal{E} = 28$ В.

**Ответ:** ЭДС батарейки составляет 28 В; внутреннее сопротивление батарейки, сопротивление резистора и сопротивление вольтметра равны.

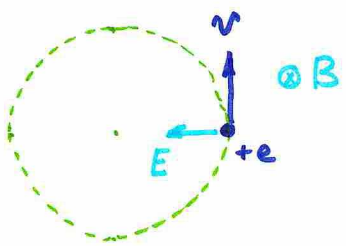
**Критерии оценок развёрнутого решения.** Участник получает +1 очко за правильное изложение рассуждения Станислава и +1 очко за указание на наличие сопротивления у реальных батарейки и вольтметра.

За решение задачи, доведённое до обоснованного вывода равенства сопротивлений батарейки, вольтметра и резистора, участник получает +4 очка (если в решении нет такого вывода, но хотя бы одно показание вольтметра правильно выражено через ЭДС батарейки и сопротивления, участник получает +1 очко).

**Критерии оценок (автоматическая проверка ответов).** Участник получает +4 очка за правильно указанное значение ЭДС батарейки.

**Задача 5.** Протон (заряд $+e$, масса $m$) движется в электромагнитном поле по окружности радиуса $R$. В каждой точке траектории электрическое поле направлено к центру окружности и равно $E$. Индукция магнитного поля направлена перпендикулярно плоскости окружности и равна $B$. При каких условиях на параметры задачи протон движется со скоростью, много меньшей скорости света? Какой может быть кинетическая энергия протона? Решите задачу в общем случае и получите численный ответ в двух частных случаях: (а) $R = 1$ м, $E = 1$ кВ/м, $B = 0$; (б) $R = 1$ м, $E = 1$ кВ/м, $B = 0,1$ Тл. Ответ представьте в электронвольтах (1 эВ — энергия, получаемая протоном при прохождении разности потенциалов 1 В). Элементарный заряд составляет $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса протона $m = 1,7 \cdot 10^{-27}$ кг, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

**Возможное решение.** Пусть $v$ — скорость движения протона по окружности (если протон движется в направлении, противоположном указанному на рисунке, будем считать скорость отрицательной).




Действующая на протон сила равна $eE + evB$ и направлена к центру окружности. Поскольку ускорение протона равно $v^2/R$, из второго закона Ньютона получим:

$$m\frac{v^2}{R} = e(E + vB).$$

Решая квадратное уравнение, находим возможные значения скорости протона:

$$v = \frac{eBR}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{eBR}{2m}\right)^2 + \frac{eER}{m}}.$$

Эти значения много меньше скорости света при соблюдении двух условий:

$$BR << \frac{mc}{e}, \qquad ER << \frac{mc^2}{e}.$$

Поскольку $mc^2/e \simeq 10^9$ В, а $ER = 10^3$ В и $BcR = 3 \cdot 10^7$ В, данные условия в задаче выполняются.

Кинетическую энергию протона можно выразить из второго закона Ньютона:

$$K = m\frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}eRE(1 + vB/E).$$

Величину $vB/E$ удобно выразить через параметр:

$$\alpha = \frac{eB^2R}{2mE};$$

тогда

$$\frac{vB}{E} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}$$

и

$$K = \frac{1}{2}eRE(\alpha + 1 \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}).$$

Проведём подстановку числовых значений.

В случае (а) $\alpha = 0$, и кинетическая энергия протона может принимать только одно значение $K = eRE/2$. Чтобы выразить ее в электронвольтах, рассчитаем отношение $K/e = RE/2 = 500$ В; отсюда $K = 500$ эВ.

В случае (б) $\alpha \simeq 471$. Кинетическая энергия протона может принимать два значения. Одно из них равно:

$$K = \frac{1}{2}eRE(\alpha + 1 + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}) \simeq eRE\alpha \simeq 470 \text{ кэВ}.$$

Второе значение энергии равно:

$$K = \frac{1}{2}eRE(\alpha + 1 - \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}) = \frac{1}{2}eRE\frac{1}{\alpha + 1 + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}} \simeq \frac{eRE}{4\alpha} \simeq 0{,}53 \text{ эВ}.$$

**Ответ:** Скорость протона много меньше скорости света при условиях $BR << mc/e$ и $ER << mc^2/e$. Кинетическая энергия протона может быть равна $K = eRE/2 \cdot (\alpha + 1 \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha})$, где $\alpha = eB^2R/(2mE)$. В случае (а) $K = 500$ эВ, в случае (б) $K = 470$ кэВ или $K = 0{,}53$ эВ.

**Критерии оценок развёрнутого решения.** Участник получает $+1$ очко за правильную запись условий, при которых скорость протона много меньше скорости света; $+1$ очко, если указал, что данные условия выполнены в пунктах (а) и (б); $+1$ очко, если обоснованно получил правильный ответ при $B = 0$; $+3$ очка, если обоснованно получил правильный ответ также и при $B \neq 0$ (при отсутствии правильного ответа при $B \neq 0$ участник может получить $+1$ очко, если правильно написал уравнение движения протона по окружности в электромагнитном поле).

**Критерии оценок (автоматическая проверка ответов).** Участник получает $+1$ очко за ответ на вопрос (а), $+1$ очко за правильно указанную максимальную кинетическую энергию в случае (б) и $+2$ очка за правильно указанную минимальную кинетическую энергию в случае (б).

## 1. Задача 1

В прилагаемом файле (см. ниже) приведено январское заочное задание для 11 класса. Распечатайте бланк, скачанный при регистрации на очный отборочный этап Московской олимпиады по физике, в достаточном количестве экземпляров. На страницах бланка от руки напишите развёрнутые решения прилагаемых задач. Сфотографируйте страницы с Вашими решениями так, чтобы текст и номер бланка были чётко видны. Создайте архив фотографий с решениями и прикрепите к заданию. Развёрнутые решения задач оцениваются из 50 очков (по 10 очков за развёрнутое решение каждой задачи).

*Московская олимпиада школьников по физике, 2014/15, нулевой тур,*
*заочное задание (январь), 11 класс*

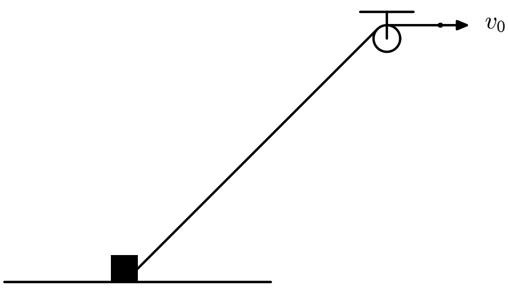
**Возможные решения задач. Критерии оценок и присуждения грамот**

*Авторы задач: С.Д. Варламов, А.А. Крыловецкий, Е.А. Мажник, И.В. Маслов, О.Ю. Шведов*

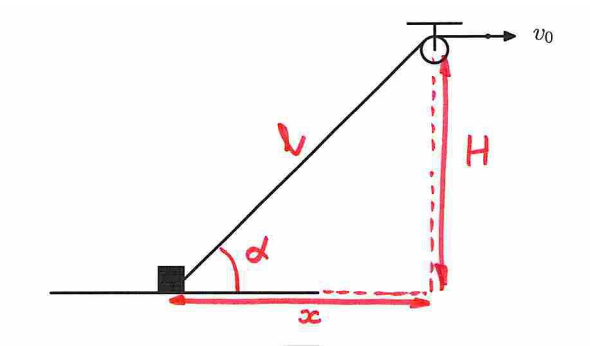
Заочное задание (январь) состоит из пяти задач. За решение каждой задачи участник получает до +10 очков. Всего участник может получить до 50 очков.

Участники, набравшие по итогам январского заочного задания не менее 30 очков из 50, награждаются грамотами призера нулевого тура. Участники, набравшие не менее 10 очков из 50, награждаются грамотами за успешное выполнение январского заочного задания по 11 классу.

**Задача 1.** К грузу массой $m$, находящемуся на гладкой горизонтальной поверхности, прикреплена невесомая нерастяжимая нить, перекинутая через блок. Школьник Вася вытягивает горизонтальный конец нити с постоянной скоростью $v_0$. С какой скоростью движется груз в момент, когда наклонный участок нити составляет угол $\alpha$ с горизонтом? Чему равна сила натяжения нити в этот момент времени? При каких соотношениях параметров задачи груз оторвётся от горизонтальной поверхности? Блок находится на высоте $H$, размерами блока и груза можно пренебречь. Ускорение свободного падения равно $g$.




**Возможное решение.** Пусть $l$ — длина наклонного участка нити, а $x$ — расстояние от груза до блока по горизонтали:




Запишем теорему Пифагора:

$$l^2 = x^2 + H^2. \tag{1}$$

За малый промежуток времени $\Delta t$ величина $x$ уменьшается на $u\Delta t$, где $u$ — скорость бруска: $\Delta x = -u\Delta t$. Величина $l$ уменьшается на $v_0\Delta t$: $\Delta l = -v_0\Delta t$.

Записывая малые изменения левой и правой частей соотношения (1), получим: $\Delta(l^2) = \Delta(x^2)$, или $2l\Delta l = 2x\Delta x$, или

$$l \cdot v_0 = x \cdot u. \tag{2}$$

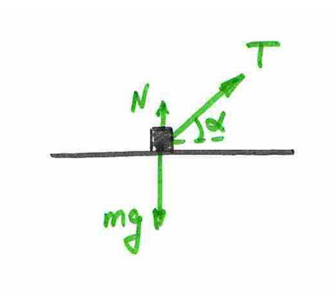
Отсюда находим скорость движения бруска:

$$u = \frac{l}{x}v_0 = \frac{v_0}{\cos\alpha}.$$

Для нахождения ускорения бруска рассмотрим малые изменения левой и правой частей соотношения (2). Имеем: $v_0\Delta l = x\Delta u + u\Delta x$, или $-v_0^2\Delta t = x\Delta u - u^2\Delta t$. Отсюда

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u^2 - v_0^2}{x} = \frac{v_0^2}{H/\operatorname{tg}\alpha}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right) = \frac{v_0^2}{H}\operatorname{tg}^3\alpha.$$

Пусть $T$ — сила натяжения нити, $N \geq 0$ — сила нормального давления, действующая на брусок.




Запишем второй закон Ньютона для движения бруска в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

$$T\cos\alpha = m\frac{\Delta u}{\Delta t} = m\frac{v_0^2}{H}\operatorname{tg}^3\alpha.$$

и

$$N + T\sin\alpha - mg = 0.$$

Первое равенство дает

$$T = \frac{mv_0^2\operatorname{tg}^3\alpha}{H\cos\alpha},$$

из второго соотношения с учетом $N \geq 0$ находим: $T\sin\alpha \leq mg$ и

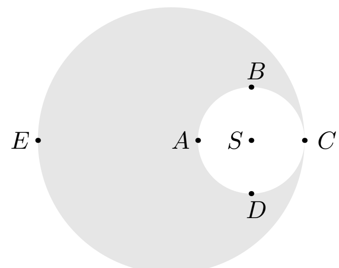
$$\frac{v_0^2\operatorname{tg}^4\alpha}{H} \leq g.$$

Таким образом, когда в процессе движения бруска величина $v_0^2\operatorname{tg}^4\alpha/H$ станет равной $g$, брусок оторвется от горизонтальной поверхности.

**Ответ:** Скорость бруска составляет $u = v_0/\cos\alpha$, сила натяжения нити равна $T = \frac{mv_0^2\operatorname{tg}^3\alpha}{H\cos\alpha}$, брусок оторвется от горизонтальной поверхности, когда величина $v_0^2\operatorname{tg}^4\alpha/H$ достигнет $g$.

**Критерии оценок развёрнутого решения.** Участник получает +3 очка за обоснованный ответ для скорости бруска, +3 очка за обоснованное соотношение для ускорения бруска, +2 очка за обоснованный ответ для силы натяжения нити и +2 очка за обоснованное условие отрыва бруска от поверхности.

**Задача 2.** Космонавты, высадившиеся на астероид радиусом $R = 5$ км, обнаружили внутри астероида сферическую полость радиусом $r = 2$ км. Оказалось, что в центре $S$ полости ускорение свободного падения составляет $g_S = 0{,}2$ см/с$^2$. Определите плотность астероида, считая её постоянной. Изобразите на рисунке векторы ускорения свободного падения в точках $A$, $B$, $C$, $D$, $E$. Определите модули ускорения свободного падения в этих точках. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м$^2$/кг$^2$.




**Возможное решение.** 1. Заполним мысленно полость веществом плотностью, равной плотности астероида $\rho$. Это дополнительное вещество не окажет никакого влияния на ускорение свободного падения в точке $S$: однородная сфера создает в центре ускорение свободного падения, равное нулю. Таким образом, $g_S$ совпадает с ускорением свободного падения на глубине $r$ внутри однородного астероида радиуса $R$. На тело массой $m$, помещенное в эту точку, действует сила тяготения со стороны внутренних слоев астероида:

$$F = \frac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi(R-r)^3 \cdot m}{(R-r)^2} = G\rho \cdot \frac{4}{3}\pi(R-r)m.$$

Следовательно,

$$g_S = \frac{4}{3}\pi G\rho(R-r). \tag{1}$$

Отметим, что в векторном виде можно записать:

$$\overrightarrow{g}_S = -\frac{4}{3}\pi G\rho \cdot \overrightarrow{OS}. \tag{2}$$

Плотность астероида оказывается, таким образом, равна

$$\rho = \frac{g_S}{\frac{4}{3}\pi G(R-r)} \simeq 2,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

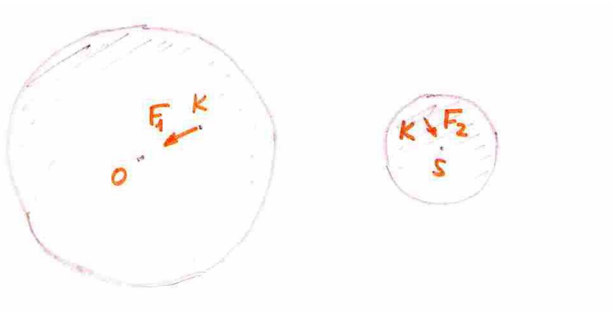
2. Пусть $K$ — другая точка внутри рассматриваемой полости. Исследуем вектор ускорения свободного падения $\overrightarrow{g}$ в этой точке. Разместим в этой точке тело массой $m$.

Если мысленно заполнить полость веществом плотностью $\rho$, на тело, аналогично (2), будет действовать сила тяготения

$$\overrightarrow{F}_1 = -\frac{4}{3}\pi G\rho m \cdot \overrightarrow{OK}.$$

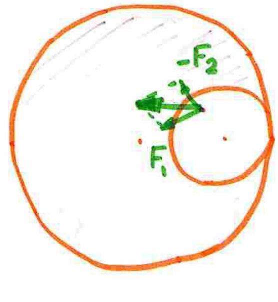
При этом сила тяготения со стороны вещества, которым мысленно заполнена полость, равна:

$$\overrightarrow{F}_2 = -\frac{4}{3}\pi G\rho m \cdot \overrightarrow{SK}.$$




Следовательно, до заполнения полости веществом сила тяготения была равна

$$\overrightarrow{F}_1 - \overrightarrow{F}_2 = -\frac{4}{3}\pi G\rho m \cdot (\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{SK}) = -\frac{4}{3}\pi G\rho m \cdot \overrightarrow{OS}.$$



Поэтому во всех точках внутри полости (в том числе в точках $A$, $B$, $C$, $D$) вектор ускорения свободного падения оказывается равен

$$\vec{g} = -\frac{4}{3}\pi G\rho \cdot \overrightarrow{OS},$$

то есть $\vec{g}_S$.

3. В точке $E$ модули сил $F_1$ и $F_2$ (см. предыдущий пункт), направленных к центру планеты, оказываются равны:

$$F_1 = \frac{4}{3}\pi G\rho m R; \qquad F_2 = \frac{G\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot m}{(R+r)^2}.$$

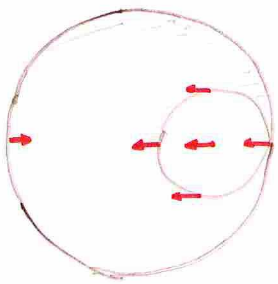
Следовательно, до заполнения полости сила тяготения была равна

$$F_1 - F_2 = \frac{4}{3}\pi G\rho m \cdot \left(R - \frac{r^3}{(R+r)^2}\right).$$

Поэтому ускорение свободного падения в точке $E$ равно

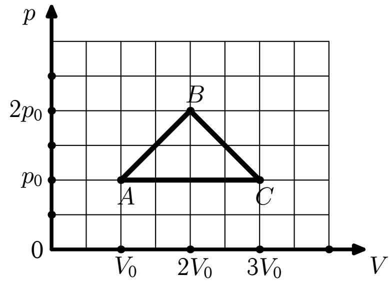
$$g_E = \frac{4}{3}\pi G\rho \cdot \left(R - \frac{r^3}{(R+r)^2}\right) = g_S\frac{1}{R-r} \cdot \left(R - \frac{r^3}{(R+r)^2}\right) = 0,32\ \text{см/с}^2.$$

**Ответ:** Плотность астероида равна $\rho = \frac{g_S}{\frac{4}{3}\pi G(R-r)} \simeq 2,4 \cdot 10^3$ кг/м$^3$; вектор ускорения свободного падения в точках $A$, $B$, $C$, $D$ равен вектору ускорения в точке $S$; в точке $E$ ускорение свободного падения направлено к центру планеты и равно по величине $g_S\frac{1}{R-r} \cdot \left(R - \frac{r^3}{(R+r)^2}\right) = 0,32$ см/с$^2$. Сами векторы ускорения свободного падения изображены на рисунке:

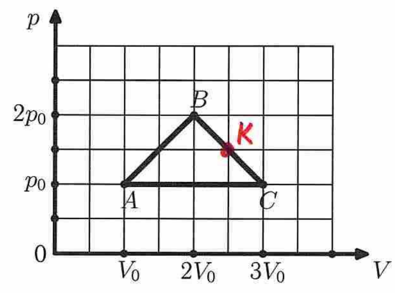


**Критерии оценок развёрнутого решения.** Участник получает +1 очко за правильную формулу, связывающую $g_S$ и $\rho$, +1 очко за обоснование этой формулы, +1 очко за правильный числовой ответ для $\rho$ (от $2,3 \cdot 10^3$ кг/м$^3$ до $2,5 \cdot 10^3$ кг/м$^3$), +3 очка за утверждение о том, что векторы ускорения свободного падения в точках $A$, $B$, $C$, $D$, $S$ равны как по величине, так и по направлению, +2 очка за обоснование данного утверждения, +1 очко за получение верной формулы для $g_E$, +1 очко за верный числовой ответ для $g_E$ (от 0,31 см/с$^2$ до 0,33 см/с$^2$).

**Задача 3.** Над идеальным одноатомным газом совершается циклический процесс $ABCA$, изображённый на $pV$-диаграмме в виде треугольника с вершинами $A(p_0; V_0)$, $B(2p_0; 2V_0)$, $C(p_0; 3V_0)$. Определите, на каких участках цикла происходит теплообмен с нагревателями, на каких — с холодильниками. Чему равно количество теплоты, полученное газом от нагревателя? А отданное холодильнику?




**Возможное решение.** На участке $AB$ совершаемая газом работа и изменение внутренней энергии газа положительны; следовательно, происходит теплообмен с нагревателем. На участке $CA$ совершаемая газом работа и изменение внутренней энергии газа отрицательны; следовательно, происходит теплообмен с холодильником. Для участка $BC$ надо проводить более детальное исследование: работа положительна, а температура и внутренняя энергия уменьшается.




Запишем уравнение процесса $BC$:

$$p = p_0\left(4 - \frac{V}{V_0}\right)$$

Рассмотрим малый участок процесса, на котором газ расширяется от объема $V$ до $V + \Delta V$. На данном участке давление изменяется от $p$ до $p + \Delta p$, причем

$$\Delta p = -\frac{p_0}{V_0}\Delta V.$$

Получаемое газом на данном малом участке количество теплоты $\Delta Q$ складывается из изменения внутренней энергии $\Delta U = \Delta(1,5pV) = 1,5p\Delta V + 1,5V\Delta p$ и совершаемой газом работы $p\Delta V$:

$$\Delta Q = 2,5p\Delta V + 1,5V\Delta p.$$

Учитывая соотношение для $\Delta p$ и $\Delta V$, получим:

$$\Delta Q = 2,5p\Delta V - 1,5V\frac{p_0}{V_0}\Delta V = 2,5p_0\left(4 - \frac{V}{V_0}\right)\Delta V - 1,5V\frac{p_0}{V_0}\Delta V = p_0\Delta V\left(10 - \frac{4V}{V_0}\right).$$

Тепловой эффект оказывается положительным при $V < 2,5V_0$ и отрицательным при $V > 2,5V_0$. Таким образом, на участке $BK$ происходит теплообмен с нагревателем, на участке $KC$ — с холодильником ($K$ — середина отрезка $BC$).

Найдем тепловой эффект на участках $ABK$ и $KCA$. Разность внутренних энергий в точках $K$ и $A$ составляет

$$U_K - U_A = 1,5(2,5 \cdot 1,5p_0V_0 - p_0V_0) = 16,5 \cdot 0,25p_0V_0.$$

Работа газа на каждом из участков считается как площадь под графиком (следует учесть, что площадь одной клетки равна $0,25p_0V_0$):

$$A_{ABK} = 9,5 \cdot 0,25p_0V_0, \qquad A_{KCA} = -5,5 \cdot 0,25p_0V_0.$$

Следовательно,

$$Q_{ABK} = U_K - U_A + A_{ABK} = 6,5p_0V_0,$$

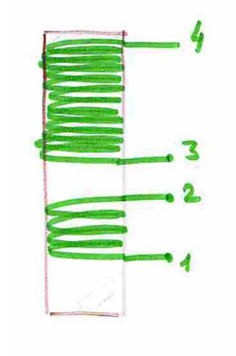
$$Q_{KCA} = U_A - U_K + A_{KCA} = -5,5p_0V_0.$$

**Ответ:** На участке $ABK$ происходит теплообмен с нагревателем, на участке $KCA$ — с холодильником. Количества теплоты, полученные от нагревателя и отданные холодильнику, составляют $Q_+ = 6,5p_0V_0$, $Q_- = 5,5p_0V_0$.

**Критерии оценок развёрнутого решения.** Участник, установивший, что на участке $AB$ происходит теплообмен с нагревателем, а на участке $CA$ — с холодильником, получает +2 очка. Еще +4 очка участник получает, если обоснует, что на участке $BK$ идет теплообмен с нагревателем, а на участке $KC$ — с холодильником. Также участник получает по +2 очка за правильно подсчитанные количества теплоты, полученные от нагревателя и отданные холодильнику.

**Задача 4.** Школьник Владислав проводит опыты с трансформатором и источником питания, который выдаёт переменное напряжение $U(t) = U_0\cos(\omega t)$, где $U_0 = 12$ В. Трансформатор имеет две обмотки с двумя выводами у каждой. Число витков первой обмотки $N$, второй обмотки $3N$. Переменные напряжения с какими амплитудами может получить Владислав с помощью данного оборудования? Для каждого значения амплитуды напряжения нарисуйте соответствующую схему соединений.

**Возможное решение.** Изобразим трансформатор на рисунке, обозначив выводы первой обмотки ($N$ витков) через 1 и 2, второй обмотки ($3N$ витков) — через 3 и 4.




Пусть магнитный поток через сердечник зависит от времени $t$ по гармоническому закону:

$$\Phi(t) = -\Phi_0 \sin(\omega t).$$

В соответствии с законом электромагнитной индукции, получим:

$$U_{12} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = N\Phi_0\omega\cos(\omega t);$$

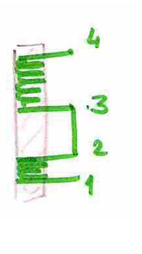
$$U_{34} = -3N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 3N\Phi_0\omega\cos(\omega t).$$

Таким образом, напряжения $U_{12}$ и $U_{34}$ совершают колебания в одной фазе, а их амплитуды отличаются в 3 раза:

$$U_{12} = A\cos(\omega t); \qquad U_{34} = 3A\cos(\omega t).$$

Получим теперь различные напряжения. Отметим, что даже без использования трансформатора можно получить напряжение, равное нулю, а также напряжение с амплитудой $U_0$.

1. Соединим проводом выводы 2 и 3:




1а. Подключая источник к концам 1 и 2, получим:

$$U_{12} = U_0\cos(\omega t), \qquad U_{24} = U_{34} = 3U_0\cos(\omega t), \qquad U_{14} = 4U_0\cos(\omega t).$$

Данная схема дает дополнительно напряжения с амплитудами колебаний $3U_0$ и $4U_0$.

1б. Подключая источник к концам 3 и 4, получим:

$$U_{12} = \frac{U_0}{3}\cos(\omega t), \qquad U_{24} = U_{34} = U_0\cos(\omega t), \qquad U_{14} = \frac{4}{3}U_0\cos(\omega t).$$

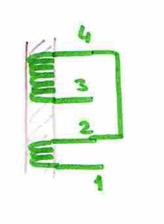
Данная схема дает дополнительно напряжения с амплитудами колебаний $U_0/3$ и $4U_0/3$.

1в. Подключая источник к концам 1 и 4, получим:

$$U_{12} = \frac{U_0}{4}\cos(\omega t), \qquad U_{24} = U_{34} = \frac{3}{4}U_0\cos(\omega t), \qquad U_{14} = U_0\cos(\omega t).$$

Данная схема дает дополнительно напряжения с амплитудами колебаний $U_0/4$ и $3U_0/4$.

2. Соединим проводом выводы 2 и 4:




2а. Подключая источник к концам 1 и 2, получим:

$$U_{12} = U_{14} = U_0\cos(\omega t), \qquad U_{34} = 3U_0\cos(\omega t), \qquad U_{13} = -2U_0\cos(\omega t).$$

Данная схема дает дополнительно напряжения с амплитудой колебаний $2U_0$.

2б. Подключая источник к концам 3 и 4, получим:

$$U_{12} = U_{14} = \frac{1}{3}U_0\cos(\omega t), \qquad U_{34} = U_0\cos(\omega t), \qquad U_{13} = -\frac{2}{3}U_0\cos(\omega t).$$

Данная схема дает дополнительно напряжения с амплитудой колебаний $2U_0/3$.

2в. Подключая источник к концам 1 и 3, получим:

$$U_{12} = U_{14} = -\frac{1}{2}U_0\cos(\omega t), \qquad U_{34} = -\frac{3}{2}U_0\cos(\omega t), \qquad U_{13} = U_0\cos(\omega t).$$

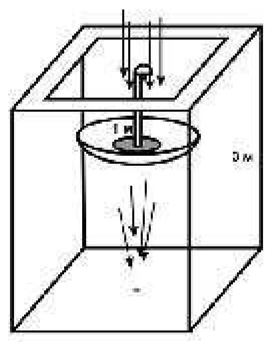
Данная схема дает дополнительно напряжения с амплитудами колебаний $U_0/2$ и $3U_0/2$.

Учитывая, что $U_0 = 12$ В, получим ответ.

**Ответ:** Можно получить напряжения с амплитудами колебаний: 0 В, 3 В, 4 В, 6 В, 8 В, 9 В, 12 В, 16 В, 18 В, 24 В, 36 В, 48 В.

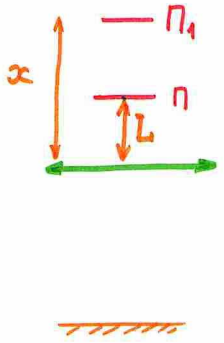
**Критерии оценок развёрнутого решения.** За указание амплитуд напряжений 0 В, 12 В, 36 В, 4 В участник получает по +1 очку (всего +4 очка). За правильный анализ каждой из схем 1а, 1б, 1в, 2а, 2б, 2в участник также получает по +1 очку (всего +6 очков).

**Задача 5.** В потолке чердака высотой 3 м расположена плоская дверца из прозрачного стекла, на ручке которой висит зонт из прозрачного пластика. В куполе зонта со временем скопилось немного воды. В момент, когда солнечные лучи перпендикулярны поверхности земли, свет, проникающий на чердак сквозь люк, проходя сквозь воду в зонте, собирается в яркую точку на полу. Длина ручки зонта составляет 1 м. Какой высоты покажется потолок в комнате, если в пасмурный день лечь на пол и смотреть вверх сквозь лужицу в зонте?



**Возможное решение.** Обозначим $L = 1$ м. Как вытекает из условия задачи, купол зонта можно рассматривать как собирающую линзу с фокусным расстоянием $2L$, которое равно расстоянию от зонта до пола.

Пусть мнимое изображение $\Pi_1$ потолка $\Pi$ в этой линзе находится на расстоянии $x$ от нее:




Согласно формуле тонкой линзы, получим:

$$\frac{1}{L} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2L}$$

и $x = 2L$. Таким образом, наблюдателю на полу потолок кажется расположенным на расстоянии $2L + 2L = 4L$ от пола.

**Ответ:** Наблюдателю на полу покажется, что потолок имеет высоту 4 м.

**Критерии оценок развёрнутого решения.** Участник, рассмотревший зонт как тонкую линзу и правильно указавший ее фокусное расстояние, получает +3 очка. За правильное применение формулы тонкой линзы участник получает +4 очка. Верный ответ оценивается в +3 очка.