LXXVIII Московская математическая олимпиада

15 марта 2015 года • 11 класс, первый день

Задача 1. Последовательность (a_n) такова, что $a_n = n^2$ при $1 \leqslant n \leqslant 5$ и при всех натуральных n выполнено равенство $a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$. Найдите a_{2015}.

Задача 2. В прошлом году Миша купил смартфон, который стоил целое четырёхзначное число рублей. Зайдя в магазин в этом году, он заметил, что цена смартфона выросла на 20 % и при этом состоит из тех же цифр, но в обратном порядке. Какую сумму Миша потратил на смартфон?

Задача 3. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X, а на боковых сторонах — точки P и Q так, что $XPBQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно PQ, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Задача 4. Единичный квадрат разрезан на n треугольников. Докажите, что одним из треугольников можно накрыть квадрат со стороной $1/n$.

Задача 5. Докажите, что в таблице 8×8 нельзя расставить натуральные числа от 1 до 64 (каждое по одному разу) так, чтобы в ней для любого квадрата 2×2 вида $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$ было выполнено равенство $|ad - bc| = 1$.

Задача 6. Все грани шестигранника — четырёхугольники, а в каждой его вершине сходятся по три ребра. Верно ли, что если для него существуют вписанная и описанная сферы, центры которых совпадают, то этот шестигранник — куб?

XIII устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 12 апреля.
Подробная информация на сайте `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXVIII Московской математической олимпиады
на сайте `www.mccme.ru/mmo/`