LXXVIII
Московская
математическая
олимпиада

Задачи и решения

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва, 2015

Департамент образования города Москвы
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Московское математическое общество
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного
математического образования

☞ Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу электронной почты mmo@mccme.ru

☞ Материалы данной книги размещены на странице

www.mccme.ru/mmo

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).

Председатель оргкомитета LXXVIII ММО
член-корр. РАН *М. И. Зеликин*.

Сборник подготовили:

Р. Ш. Абугалиев, *А. А. Авилов*, *А. В. Антропов*, *В. Д. Арнольд*, *Е. В. Бакаев*, *А. Г. Банникова*, *А. В. Бегунц*, *А. Д. Блинков*, *П. А. Бородин*, *В. А. Брагин*, *А. И. Буфетов*, *И. Р. Высоцкий*, *С. С. Галкин*, *С. Б. Гашков*, *Т. И. Голенищева-Кутузова*, *Д. В. Горяшин*, *А. С. Гусев*, *Р. Н. Деев*, *И. А. Дмитриев*, *С. А. Дориченко*, *М. А. Евдокимов*, *А. А. Заславский*, *О. А. Заславский*, *Ф. А. Ивлев*, *Т. В. Казицына*, *А. Я. Канель-Белов*, *В. К. Ковальджи*, *О. Н. Косухин*, *Ю. С. Котельникова*, *Д. М. Креков*, *Н. М. Курносов*, *А. Ю. Кушнир*, *Н. Ю. Медведь*, *А. Б. Меньщиков*, *Г. А. Мерзон*, *И. В. Митрофанов*, *А. А. Пахарев*, *Г. А. Погудин*, *А. А. Пономарёв*, *М. А. Раскин*, *И. В. Раскина*, *Е. Ю. Смирнов*, *А. А. Соколов*, *Ю. В. Тихонов*, *Б. Р. Френкин*, *А. В. Хачатурян*, *Я. В. Хроменков*, *А. В. Шаповалов*, *Д. Э. Шноль*, *А. Г. Якубов*, *И. В. Ященко*

Проведение олимпиады и издание книги осуществлены при поддержке фирмы «НИКС», компании «Яндекс» и фонда «Математические этюды».

6 класс

1. Через двор проходят четыре пересекающиеся тропинки (см. рис. 1). Посадите четыре яблони так, чтобы по обе стороны от каждой тропинки было поровну яблонь. (*Е. В. Бакаев*)

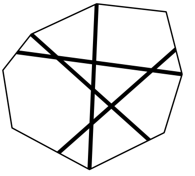


Рис. 1

2. а) Впишите в каждый кружочек на рис. 2 по цифре, отличной от нуля, так, чтобы сумма цифр в двух верхних кружочках была в 7 раз меньше суммы остальных цифр, а сумма цифр в двух левых кружочках — в 5 раз меньше суммы остальных цифр.

б) Докажите, что задача имеет единственное решение. (*А. В. Шаповалов*)

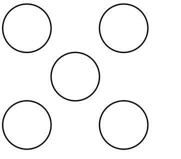


Рис. 2

3. Математик с пятью детьми зашел в пиццерию.

Маша: Мне с помидорами и чтоб без колбасы.

Ваня: А мне с грибами.

Даша: Я буду без помидоров.

Никита: А я с помидорами. Но без грибов!

Игорь: И я без грибов. Зато с колбасой!

Папа: Да, с такими привередами одной пиццей явно не обойдешься...

Сможет ли математик заказать две пиццы и угостить каждого ребенка такой, какую тот просил, или все же придется три пиццы заказывать? (*Е. В. Бакаев*)

4. Разрежьте нарисованный на рис. 3 шестиугольник на четыре одинаковые фигуры. Резать можно только по линиям сетки. (*Е. В. Бакаев*)

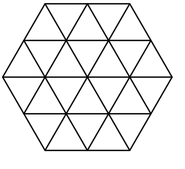


Рис. 3

5. Обезьяна становится счастливой, когда съедает три разных фрукта. Какое наибольшее количество обезьян можно осчастливить, имея 20 груш, 30 бананов, 40 персиков и 50 мандаринов? Обоснуйте свой ответ. (*А. В. Шаповалов*)

6. Юра начертил на клетчатой бумаге прямоугольник (по клеточкам) и нарисовал на нем картину. После этого он нарисовал вокруг картины рамку шириной в одну клеточку (см. рис. 4). Оказалось, что площадь картины равна площади рамки. Какие размеры могла иметь Юрина картина? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)

(*Т. И. Голенищева-Кутузова*)

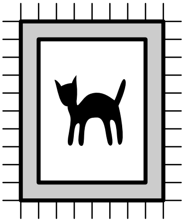


Рис. 4

7 класс

1. Во дворе, где проходят четыре пересекающиеся тропинки, растет одна яблоня (см. рис. 5). Посадите еще три яблони так, чтобы по обе стороны от каждой тропинки было поровну яблонь. (*Е. В. Бакаев*)

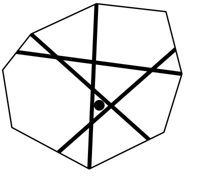


Рис. 5

2. В аквариуме живет три вида рыбок: золотые, серебряные и красные. Если кот съест всех золотых рыбок, то рыбок станет на 1 меньше, чем 2/3 исходного числа. Если кот съест всех красных рыбок, то рыбок станет на 4 больше, чем 2/3 исходного числа. Каких рыбок — золотых или серебряных — больше и на сколько?

(*И. Р. Высоцкий, И. В. Раскина*)

3. См. задачу 4 для 6 класса.

4. Смешарики живут на берегах пруда в форме равностороннего треугольника со стороной 600 м. Крош и Бараш живут на одном берегу в 300 м друг от друга. Летом Лосяшу до Кроша идти 900 м, Барашу до Нюши — тоже 900 м. Докажите, что зимой, когда пруд замерзнет и можно будет ходить прямо по льду, Лосяшу до Кроша снова будет идти столько же метров, сколько Барашу до Нюши.

(*Е. В. Бакаев, А. В. Хачатурян*)

5. Имеется набор из двух карточек: $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$. За одну операцию разрешается составить выражение, использующее числа на карточках, арифметические действия, скобки. Если его значение — целое неотрицательное число, то его выдают на новой карточке. (Например, имея карточки $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ и $\boxed{7}$, можно составить выражение $\boxed{7}\boxed{5}/\boxed{3}$ и получить карточку

$\boxed{25}$ или составить выражение $\boxed{3}\,\boxed{5}$ и получить карточку $\boxed{35}$.) Как получить карточку с числом 2015 а) за 4 операции; б) за 3 операции? (*И. В. Ященко*)

6. Петя записал 25 чисел в клетки квадрата 5×5. Известно, что их сумма равна 500. Вася может попросить его назвать сумму чисел в любой клетке и всех ее соседях по стороне. Может ли Вася за несколько таких вопросов узнать, какое число записано в центральной клетке? (*Е.В.Бакаев*)

8 класс

1. Володя бежит по круговой дистанции с постоянной скоростью. В двух точках дистанции стоит по фотографу. После старта Володя 2 минуты был ближе к первому фотографу, затем 3 минуты — ближе ко второму фотографу, а потом снова ближе к первому. За какое время Володя пробежал весь круг? (*В. К. Ковальджи*)

2. Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что прямая DE перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков AE и BC. (*Е. В. Бакаев*)

3. Миша заметил, что на электронном табло, показывающем курс доллара к рублю (4 цифры, разделенные десятичной запятой), горят те же самые четыре *различные* цифры, что и месяц назад, но в другом порядке. При этом курс вырос ровно на 20%. Приведите пример того, как такое могло произойти. (*М.А. Евдокимов*)

4. Будем называть натуральное число *почти квадратом*, если это либо точный квадрат (т. е. квадрат целого числа), либо точный квадрат, умноженный на простое число. Могут ли 8 почти квадратов идти подряд? (*Д. М. Креков*)

5. В остроугольном треугольнике ABC, в котором $\angle A = 45^\circ$, проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Биссектриса угла BAA_1 пересекает прямую B_1A_1 в точке D, а биссектриса угла CAA_1 пересекает прямую C_1A_1 в точке E. Найдите угол между прямыми BD и CE. (*А. Г. Якубов*)

6. Император пригласил на праздник 2015 волшебников, некоторые из которых добрые, а остальные злые. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой может говорить что угодно. При этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет.

На празднике император задает каждому волшебнику (в каком хочет порядке) по вопросу, на которые можно ответить «да» или «нет». Опросив всех волшебников, император изгоняет одного. Изгнанный волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. Затем император вновь задает каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (он может это сделать после любого вопроса).

Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

(*И. В. Митрофанов*)

9 класс

1. Существует ли такое натуральное число n, что числа n, n^2, n^3 начинаются на одну и ту же цифру, отличную от единицы? (*Е. В. Бакаев*)

2. По кругу в некотором порядке расставлены все натуральные числа от 1 до 1000 таким образом, что любое из чисел является делителем суммы двух своих соседей. Известно, что рядом с числом k стоят два нечетных числа. Какой четности может быть число k? (*Б. Р. Френкин*)

3. Каждый день Фрекен Бок испекает квадратный торт размером 3×3. Карлсон немедленно вырезает себе из него четыре квадратных куска размером 1×1 со сторонами, параллельными сторонам торта (не обязательно по линиям сетки 3×3). После этого Малыш вырезает себе из оставшейся части торта квадратный кусок со сторонами, также параллельными сторонам торта. На какой наибольший кусок торта может рассчитывать Малыш вне зависимости от действий Карлсона? (*Е. В. Бакаев*)

4. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного треугольника ABC. Две равные окружности касаются сторон AB, BC и AC, BC соответственно; кроме этого, они касаются друг друга в точке K. Оказалось, что K лежит на прямой OI. Найдите $\angle BAC$.

(*М. А. Евдокимов*)

5. См. задачу 6 для 8 класса.

6. Существуют ли два многочлена с целыми коэффициентами такие, что у каждого из них есть коэффициент, модуль которого больше 2015, но у произведения этих двух многочленов модули всех коэффициентов не превосходят 1?
(*А. Я. Канель-Белов*)

10 класс

1. По целому числу a построим последовательность

$$a_1 = a, \ a_2 = 1 + a_1, \ a_3 = 1 + a_1 a_2, \ a_4 = 1 + a_1 a_2 a_3, \ \ldots$$

(каждое следующее число на 1 превосходит произведение всех предыдущих). Докажите, что разности ее соседних членов $(a_{n+1} - a_n)$ — квадраты целых чисел. (*Д. М. Креков*)

2. В турнире по футболу участвует $2n$ команд $(n > 1)$. В каждом туре команды разбиваются на n пар и команды в каждой паре играют между собой. Так провели $2n - 1$ тур, по окончании которых каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. За победу давалось 3 очка, за ничью 1, за поражение 0 очков. Оказалось, что для каждой команды отношение набранных ею очков к количеству сыгранных ею игр после последнего тура не изменилось. Докажите, что все команды сыграли вничью все партии.
(*А. Д. Блинков, А. А. Заславский, А. В. Антропов*)

3. Клетки бесконечного клетчатого листа бумаги раскрасили в черный и белый цвета в шахматном порядке. Пусть X — треугольник площади S с вершинами в узлах сетки. Покажите, что есть такой подобный X треугольник с вершинами в узлах сетки, что площадь его белой части равна площади черной части и равна S. (*М. А. Евдокимов*)

4. См. задачу 6 для 8 класса.

5. Дан треугольник ABC. Проведены высота AH и медиана CM. Обозначим точку их пересечения через P. Высота, проведенная из вершины B треугольника, пересекается с перпендикуляром, опущенным из точки H на прямую CM, в точке Q. Докажите, что прямые CQ и BP перпендикулярны. (*Ф. А. Ивлев*)

6. См. задачу 6 для 9 класса.

11 класс (1-й день)

1. Последовательность (a_n) такова, что $a_n = n^2$ при $1 \leqslant n \leqslant 5$ и при всех натуральных n выполнено равенство $a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$. Найдите a_{2015}. (*С. Б. Гашков*)

2. В прошлом году Миша купил смартфон, который стоил целое четырехзначное число рублей. Зайдя в магазин в этом году, он заметил, что цена смартфона выросла на 20% и при этом состоит из тех же цифр, но в обратном порядке. Какую сумму Миша потратил на смартфон?
(*М. А. Евдокимов*)

3. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X, а на боковых сторонах — точки P и Q так, что $XPBQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно PQ, лежит на описанной окружности треугольника ABC. (*Ф. А. Ивлев*)

4. Единичный квадрат разрезан на n треугольников. Докажите, что одним из треугольников можно накрыть квадрат со стороной $1/n$. (*А. В. Шаповалов*)

5. Докажите, что в таблице 8×8 нельзя расставить натуральные числа от 1 до 64 (каждое по одному разу) так, чтобы в ней для любого квадрата 2×2 вида $\boxed{\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}}$ было выполнено равенство $|ad - bc| = 1$. (*О. Н. Косухин*)

6. Все грани шестигранника — четырехугольники, а в каждой его вершине сходятся по три ребра. Верно ли, что если для него существуют вписанная и описанная сферы, центры которых совпадают, то этот шестигранник — куб?
(*М. А. Евдокимов*)

11 класс (2-й день)

1. Сумма нескольких не обязательно различных положительных чисел не превосходила 100. Каждое из них заменили на новое следующим образом: сначала прологарифмировали по основанию 10, затем округлили стандартным образом до ближайшего целого числа и, наконец, возвели 10 в найденную целую степень. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел превышает 300? (*А. В. Бегунц*)

2. Какое наибольшее количество множителей вида $\sin\frac{n\pi}{x}$ можно вычеркнуть в левой части уравнения

$$\sin\frac{\pi}{x}\sin\frac{2\pi}{x}\sin\frac{3\pi}{x}\ldots\sin\frac{2015\pi}{x}=0$$

так, чтобы число его натуральных корней не изменилось?

(*А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин*)

3. У Ивана-царевича есть два сосуда емкостью по 1 л, один из которых полностью заполнен обычной водой, а в другом находится a л живой воды, $0 < a < 1$. Он может переливать только из сосуда в сосуд любой объем жидкости до любого уровня без переполнений и хочет за конечное число таких переливаний получить 40-процентный раствор живой воды в одном из сосудов. При каких значениях a Иван-царевич сможет это сделать? Считайте, что уровень жидкости в каждом из сосудов можно точно измерить в любой момент времени. (*П. А. Бородин*)

4. День в Анчурии может быть либо ясным, когда весь день солнце, либо дождливым, когда весь день льет дождь. И если сегодня день не такой, как вчера, то анчурийцы говорят, что сегодня погода изменилась. Однажды анчурийские ученые установили, что 1 января день всегда ясный, а каждый следующий день в январе будет ясным, только если ровно год назад в этот день погода изменилась. В 2015 году январь в Анчурии был весьма разнообразным: то солнце, то дожди. В каком году погода в январе впервые будет меняться ровно так же, как в январе 2015 года?

(*И. Р. Высоцкий*)

5. На поверхности сферической планеты расположены четыре материка, отделенные друг от друга океаном. Назовем точку океана *особой*, если для нее найдутся не менее трех ближайших (находящихся от нее на равных расстояниях) точек суши, причем все на разных материках. Какое наибольшее число особых точек может быть на этой планете? (*П. А. Бородин*)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 класс

1. *Ответ*. Яблони можно посадить многими способами, например так, как показано на рис. 6.

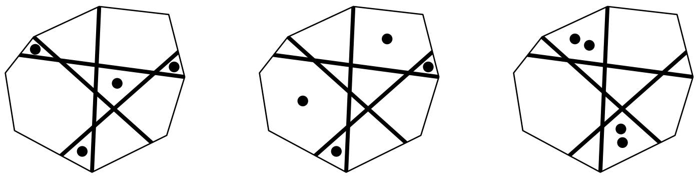


Рис. 6

2. а) *Ответ*. См. рис. 7.

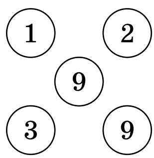


Рис. 7

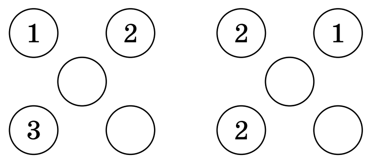


Рис. 8

б) *Решение*. Если сумма цифр в двух верхних кружочках в 7 раз меньше суммы остальных цифр, то она в 8 раз меньше суммы всех пяти цифр. Рассуждая так же, получим, что сумма цифр в двух левых кружочках в 6 раз меньше суммы всех пяти цифр. Значит, сумма всех цифр делится без остатка и на 6, и на 8. Минимальное такое натуральное число — это 24. Следующее число равно 48, но сумма всех пяти цифр не может превышать $5 \cdot 9 = 45$.

Итак, сумма всех цифр 24, сумма двух верхних $24 : 8 = 3$, сумма двух левых $24 : 6 = 4$. Легко видеть, что цифры в трех кружках слева и сверху можно разместить только двумя способами (см. рис. 8), причем в первом случае сумма двух остальных цифр равна 19, что невозможно, а во втором равна 18, что возможно, только если они обе девятки.

3. *Ответ*. Нет, не сможет.

Решение. Пусть удалось обойтись двумя пиццами. Для Вани мы должны заказать пиццу с грибами. Другие мальчики грибы не едят, так что вторая пицца непременно будет с помидорами и колбасой. Маша такую пиццу есть откажется, так что в Ванину пиццу мы будем вынуждены добавить помидоры. Теперь помидоры есть в обеих пиццах, и для Даши придется заказывать третью пиццу.

Комментарий. Решение можно сделать более наглядным с помощью следующей схемы. Посадим детей в пиццерии за круглый стол так, как показано на рис. 9. Любые двое, сидящие рядом, не станут есть одну пиццу (проверьте!). Но если заказано всего две пиццы, то какая-то достанется по крайней мере троим, а среди трех ребят всегда найдутся соседи за столом.

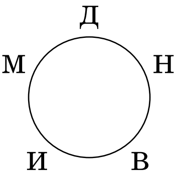


Рис. 9

4. *Ответ*. См. рис. 10.

Комментарий. Решение единственно с точностью до поворотов и отражений.

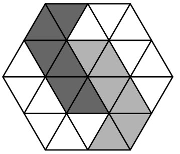


Рис. 10

5. *Ответ*. 45.

Решение. Отложим пока мандарины в сторону. Осталось $20 + 30 + 40 = 90$ фруктов. Поскольку обезьяне мы скармливаем не более одного мандарина, каждая обезьяна съест из этих 90 фруктов по крайней мере два. Значит, обезьян не более чем $90 : 2 = 45$. Покажем, как можно осчастливить 45 обезьян:

5 обезьян съедают: грушу, банан, мандарин;

15 обезьян съедают: грушу, персик, мандарин;

25 обезьян съедают: персик, банан, мандарин.

Всего 45 счастливых обезьян — и еще осталось пять неиспользованных мандаринов!

6. *Ответ*. 3×10 или 4×6 клеточек.

Решение. Очевидно, что ширина картины больше одной клеточки. Нарисуем внутри картины еще одну рамку шириной в одну клеточку (см. рис. 11). Тогда в маленькой рамке, как и в большой, будет по четыре угловых клеточки (они закрашены), а каждая сторона будет на две клеточки короче. Значит, в маленькой

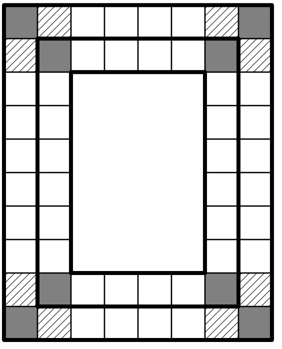


Рис. 11

рамке будет на 8 клеточек меньше, чем в большой (эти клеточки заштрихованы). Значит, из 8 клеточек и составится прямоугольник, образовавшийся внутри маленькой рамки. Очевидно, что прямоугольник площадью 8 клеточек может иметь размеры 2×4 или 1×8 клеточек. Отсюда и получаем ответ.

Комментарий. Те, кто уже хорошо знаком с алгеброй, могут получить ответ другим способом. Если картина — прямоугольник $a \times b$ клеточек, то картина в рамке — это уже прямоугольник $(a+2) \times (b+2)$ клеточек. Площадь картины в рамке вдвое больше площади картины без рамки, поэтому $(a+2)(b+2) = 2ab$. Раскрывая скобки, получим $2a + 2b + 4 = ab$. Можно теперь привести это равенство к виду $(a-2)(b-2) = 8$ и получить, что либо одно из чисел $a-2$ и $b-2$ равно 1, а другое 8, либо же одно из чисел $a-2$ и $b-2$ равно 2, а другое 4. Эти варианты и приводят к верным ответам.

7 класс

1. *Ответ*. См. рис. 12.

Комментарий. Решение единственно.

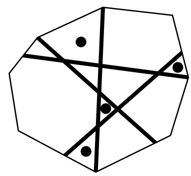


Рис. 12

2. *Ответ*. Серебряных рыбок на 2 больше.

Решение. Из первого условия золотых рыбок на 1 больше, чем треть. Из второго условия красных рыб на 4 меньше, чем треть. Значит, серебряных на 3 больше, чем треть.

3. См. решение задачи 4 для 6 класса.

4. *Решение*. Пусть Крош живет на расстоянии x от ближайшего к нему угла пруда, $АК = x$ (см. рис. 13). Тогда расстояние от Бараша до его угла пруда есть $БВ = 600 - 300 - x = 300 - x$. Теперь по условию $ВЛ = 900 - ВК = 300 + x$ (отметим, что так как 900 — это ровно половина периметра пруда, каким из двух путей идти Лосяшу до Кроша, неважно), $АН = 900 - АБ = 600 - x$. Осталось заметить, что треугольники $АНБ$ и $ВКЛ$ равны по углу ($\angle А = 60^\circ = \angle В$) и двум прилежащим к нему сторонам ($АБ = 300 + x = ВЛ$, $АН = ВК = 600 - x$). Значит, равны и их соответствующие стороны $ЛК$ и $БН$.

Комментарий. То, что Нюша действительно живет на стороне AC (а не на стороне BC), видно из того, что $600-x<600$ (после того, как Бараш прошел $300+x$ до вершины A, ему остается до Нюши еще $600-x<AC$). Аналогичным образом, Лосяш живет именно на стороне BC.

5. *Ответ.* а) Например,

$\boxed{1}+\boxed{2}=\boxed{3}$; $\boxed{3}+\boxed{2}=\boxed{5}$; $\boxed{3}-\boxed{2}-\boxed{1}=\boxed{0}$; $\boxed{2}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{5}=\boxed{2015}$

или

$\boxed{1}+\boxed{2}=\boxed{3}$; $\boxed{1}\,\boxed{3}=\boxed{13}$; $\boxed{3}\,\boxed{1}=\boxed{31}$; $(\boxed{2}+\boxed{3})\cdot\boxed{13}\cdot\boxed{31}=\boxed{2015}$.

б) $\boxed{1}+\boxed{2}=\boxed{3}$; $\boxed{3}\cdot\boxed{2}\,\boxed{1}=\boxed{63}$; $(\boxed{63}+\boxed{2})\cdot\boxed{3}\,\boxed{1}=\boxed{2015}$.

Комментарии. 1. Чтобы решить задачу, полезно для начала разложить 2015 на простые множители: $2015=5\cdot13\cdot31$.

2. Менее чем за 3 операции получить карточку с числом 2015 невозможно.

6. *Ответ.* Да.

Решение. Задав вопросы про 6 клеток, отмеченных на рис. 14 слева, Вася может узнать сумму всех чисел, кроме L и R. Вычитая ее из 500, он найдет $L+R$. Аналогичным образом он может найти $U+D$. После этого Васе остается узнать сумму чисел в центральном кресте и вычесть из нее $(L+R)+(U+D)$.

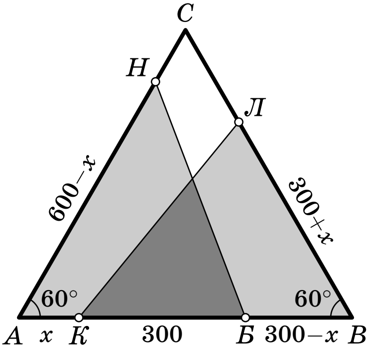


Рис. 13

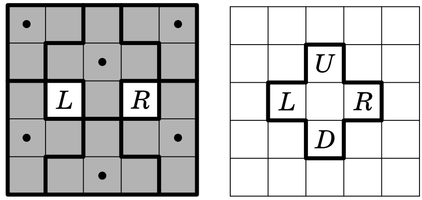


Рис. 14

8 класс

1. *Ответ*. 6 минут.

Решение. Отметим первого и второго фотографа на круге с помощью точек A и B соответственно (рис. 15), точками C и D обозначим середины дуг (CD — диаметр), соединяющих A и B. Тогда круг можно разделить на две половины, на дуге CAD Володя ближе к первому фотографу, а на дуге CBD (жирным на рис. 15) — ближе ко второму фотографу. По условию, ближе ко второму фотографу он был в течение 3 минут, т. е. ровно то время, пока он бежал по дуге CBD. Следовательно, весь круг он пробегает за 6 минут.

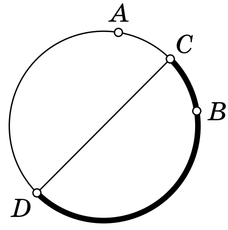


Рис. 15

Комментарий. То, что Володя первые две минуты был ближе к первому фотографу, не нужно для определения времени, за которое он пробегает круг. Но при этом мы можем однозначно сказать, на какой из дуг он находился и сколько минут он был ближе к первому фотографу во второй раз (1 минута).

2. *Решение*. Проведем в треугольнике AED среднюю линию FH (см. рис. 16). По свойству средней линии $FH \parallel AD$ и $FH = \frac{1}{2}AD$. Если G — середина BC, то $GC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$. Значит, $FGCH$ является параллелограммом ($GC = FH$, $GC \parallel FH$). Следовательно, $CH \parallel FG$ и нам необходимо доказать, что $\angle CHD = 90°$.

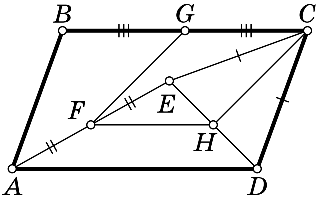


Рис. 16

Рассмотрим теперь треугольник ECD, он равнобедренный по условию ($CE = CD$). Значит, в нем медиана CH совпадает с высотой. Таким образом, $\angle CHD = 90°$.

3. *Ответ*. Да, мог. Например, в начале месяца курс мог равняться 49,50, а в конце — 59,40 рублей за доллар.

Комментарий. Пусть A — четырехзначное число, составленное из цифр электронного табло в первоначальном порядке (считаем, что две цифры отделены от двух других десятичной запятой), а B — число, составленное из тех же цифр, но в другом порядке. Тогда из условия следует, что $B = 1{,}2 \cdot A$, или, что то же самое, $5 \cdot B = 6 \cdot A$. Из этого равенства по признакам делимости на 3 и на 9 немедленно получаем: B делится на 3, поэтому сумма цифр B, а значит, и сумма цифр A делятся на 3, и поэтому A делится на 3; следовательно, B делится на 9, и сумма цифр B, а значит, и сумма цифр A делятся на 9; таким образом, A делится на 9. Более того, B делится на 54, так как A делится на 9, а $5 \cdot B = 6 \cdot A$. Из этого равенства также получаем, что A делится на 45. Итак, набор (A, B) должен иметь вид $(45k, 54k)$ для некоторого натурального k. При $k = 100$ и $k = 10$ получаем пары (4500, 5400) и (450, 540). Их сумма (4950, 5940) будет удовлетворять и требованию, что все цифры различны. Можно проверить (хотя этого доказывать и не требовалось), что решение единственное с точностью до перестановки десятичной запятой: условию также удовлетворяет пара (0495, 0594), а других таких пар нет. Отметим, что такие курсы действительно были в ходе биржевых торгов в конце ноября и в конце декабря 2014 года.

4. *Ответ.* Нет, не могут.

Первое решение. Заметим, что среди восьми последовательных натуральных чисел найдутся числа, дающие остатки 2 и 6 при делении на 8. Они делятся на 2, но не делятся на 4, так что они обязаны иметь вид $2m_1^2$ и $2m_2^2$. Тогда $2m_1^2 - 2m_2^2 = 4 \Rightarrow m_1^2 - m_2^2 = 2$, что невозможно. Получаем противоречие; значит, восьми подряд идущих почти квадратов не может быть.

Второе решение. Заметим, что среди восьми последовательных натуральных чисел найдется число, дающее остаток 6 при делении на 8. Докажем, что оно не может быть почти квадратом. Действительно, пусть $n = 8k + 6$ — почти квадрат. Тогда n делится на 2, но не делится на 4, значит, будучи почти квадратом, n обязано иметь вид $2m^2$, так как по условию в разложение n на простые множители может входить не более одного простого числа в нечетной степени. Но если $8k + 6 = 2m^2$, то $m^2 = 4k + 3$, а квадрат целого числа не может давать остаток 3 при делении на 4. Действительно, четные числа после возведения в квадрат делятся на 4, а нечетные дают остаток 1. Тем самым мы получаем противоречие. Значит, восьми подряд идущих почти квадратов не может быть.

Комментарий. Пять почти квадратов подряд идти могут, например (1, 2, 3, 4, 5). Более того, в первом миллионе чисел таких последовательностей из пяти почти квадратов ровно 4: (1, 2, 3, 4, 5); (16, 17, 18, 19, 20); (97, 98, 99, 100, 101) и (241, 242, 243, 244, 245). Автору задачи неизвестно, могут ли идти подряд шесть или семь почти квадратов.

Рассуждая аналогично первому решению (или второму), но по модулю 36, можно показать, что почти квадраты не могут давать остатки 6, 10, 15, 21, 22, 24, 30, 33 и 34 при делении на 36 (это, кстати, еще одно решение задачи). Таким образом, если найдется 7 подряд идущих почти квадратов, то они могут давать только остатки $-1, 0, 1, \ldots, 5$ при делении на 36. Те среди них, что дают остатки 2 и 3, могут быть только лишь вида $2x^2$ и $3y^2$ соответственно, таким образом, семерка подряд идущих почти квадратов дает решение уравнения $3y^2-2x^2=1$, которое сводится к уравнению Пелля. Более того, ни одно из наших чисел $2x^2$ и $3y^2$ не делится на 5. Действительно, если какое-то из них делится на 5, то второе имеет вид $5k\pm1$, что невозможно для чисел вида $2x^2$ и $3y^2$. Значит, это два подряд идущих ненулевых остатка по модулю 5, но заметим, что 2 и 3 — квадратичные невычеты по модулю 5, а 1 и 4 — вычеты, значит, $2x^2$ и $3y^2$ тоже невычеты и они идут подряд. Значит, это в точности 2 и 3 по модулю 5. Отсюда получаем, что то число среди найденной семерки почти квадратов, которое делится на 36, делится еще и на 5, значит, то, что дает остаток 5 при делении на 36, тоже делится на 5 и одно из этих двух кратных пяти чисел не делится на 25, а следовательно, имеет вид $5z^2$. Таким образом, существование семи идущих подряд почти квадратов влечет за собой решение системы уравнений, сводящихся к уравнениям Пелля, а именно $3y^2-2x^2=1$ и $5z^2-2x^2=3$ или -2. Отметим, что у одной из этих систем — той, где уравнение $5z^2-2x^2=3$, — есть корни, например, (1, 1, 1) или (11, 9, 7).

5. *Ответ*. $67{,}5^\circ$.

Первое решение. Прямая A_1A является биссектрисой угла $B_1A_1C_1$ (высота треугольника является биссектрисой его ортотреугольника). Теперь докажем, что угол $B_1A_1C_1$ прямой. Действительно, легко заметить, что $\angle B_1A_1C=\angle A$ (это следует из подобия треугольников A_1B_1C и ABC), аналогично $\angle C_1A_1B=\angle A$. Таким образом, $\angle B_1A_1C_1=90^\circ$, а значит, $\angle AA_1C_1=\angle AA_1B_1=45^\circ$.

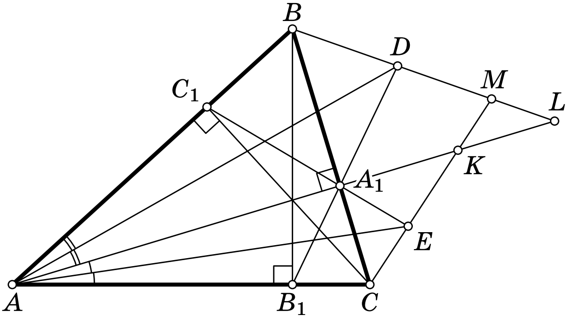


Рис. 17

Пусть K и L — точки пересечения прямой AA_1 с прямыми CE и BD соответственно. Из вышесказанного следует, что $\angle KA_1E = \angle EA_1C = \angle BA_1D = \angle DA_1L = 45^\circ$ (как вертикальные для $\angle AA_1C_1 = \angle AA_1B_1$). Следовательно, A_1E и A_1D являются биссектрисами углов KA_1C и BA_1L соответственно. Таким образом, точка D равноудалена от прямых AA_1 и A_1B, а E — от прямых A_1C и AA_1. Но точка D по условию задачи лежит на биссектриссе угла BAA_1, поэтому она равноудалена от прямых AA_1 и AB. Значит, D — центр вневписанной окружности треугольника BAA_1. Значит, BD — биссектриса внешнего угла к углу ABC. Аналогично, E — центр вневписанной окружности к треугольнику CAA_1, а CE — биссектрисса внешнего угла к углу $\angle ACB$.

Пусть M — точка пересечения прямой CE с прямой BD, тогда по теореме о сумме углов треугольника

$$\angle BMC = 180^\circ - \frac{(180^\circ - \angle C)}{2} - \frac{(180^\circ - \angle B)}{2} = \frac{\angle B + \angle C}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67{,}5^\circ.$$

Второе решение. Обозначим $\angle BAA_1$ через 2β, а $\angle CAA_1$ — через 2γ. Так как $2\beta + 2\gamma = 45^\circ$, то $\beta + \gamma = 22{,}5^\circ$.

Заметим, что поскольку отрезок AB виден из точек A_1 и B_1 под прямым углом, точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром AB. Поэтому $\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1 = 45^\circ$.

По теореме о внешнем угле треугольника (для треугольника ADA_1) $\angle B_1DA = 45^\circ - \beta = 2(\beta + \gamma) - \beta = 2\gamma + \beta = \angle B_1AD$. Поэтому $B_1A = B_1D$. Но так как, очевидно, $B_1A = B_1B$, то $B_1B = B_1D$.

Из треугольника AA_1B_1, используя вписанные углы, находим: $\angle DB_1B = 180^\circ - 2\gamma - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ - 2\gamma = 2\beta$. Так как треугольник BB_1D равнобедренный, то

$$\angle B_1BD = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta.$$

Далее, пользуясь вписанными углами, получаем, что

$$\angle A_1BB_1 = 90^\circ - 2\beta - 45^\circ = 45^\circ - 2\beta = 2\gamma,$$

то есть $\angle A_1BD = 90^\circ - \beta - 2\gamma$.

Аналогично $\angle A_1CE = 90^\circ - \gamma - 2\beta$. Тогда искомый угол равен $180^\circ - \angle A_1BD - \angle A_1CE = 3(\beta + \gamma) = 3 \cdot 22{,}5^\circ = 67{,}5^\circ$.

6. *Решение.* Пусть волшебники сидят в ряд. Вначале император задает всем волшебникам, начиная со второго, вопрос про первого из них: «Добрый ли первый волшебник?». Если хотя бы кто-то сказал «да» (т. е. что первый волшебник — добрый), то первого сказавшего «да» император изгоняет. Возможны два варианта:

1) Изгнанный волшебник является злым. В этом случае у нас остается на одного волшебника меньше, но при этом император ни одного доброго не изгнал. И можно рассматривать задачу с меньшим числом волшебников. При этом очевидно, что для случая двух волшебников император может изгнать всех злых.

2) Изгнанный волшебник — добрый. В таком случае его ответ про первого волшебника является правдой, т. е. первый волшебник — добрый. Зададим первому вопрос («Добрый ли твой сосед?») про второго, второму — про третьего, и так далее. Тогда первый волшебник, про которого его сосед слева скажет, что он — злой («нет»), в действительности является злым. Его и изгонит император. Далее процедура повторяется.

Если на первый вопрос все ответили «нет», то император изгоняет первого волшебника. Опять же возможны два варианта. Если изгнанный волшебник злой, то задача вновь сводится к аналогичной для меньшего числа волшебников. Если изгнанный волшебник оказался добрым, то мы знаем, что все остальные волшебники — злые.

9 класс

1. *Ответ*. Да, существует. Например, 99. Несложно убедиться, что $99^2 = 9801$ и $99^3 = 970299$.

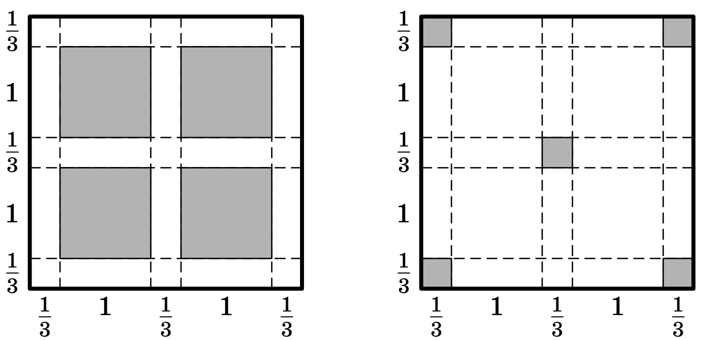
2. *Ответ*. Четное.

Решение. Заметим, что два четных числа не могут стоять подряд, так как тогда следующее за ними число было бы четным и т. д., т. е. все числа на круге оказались бы четными. Поскольку четных ровно половина, они чередуются с нечетными, поэтому k — четное.

Условие задачи подразумевает, что такая расстановка чисел существует, поэтому приводить пример подходящей расстановки не требуется. Тем не менее, такой пример привести очень легко: достаточно расставить числа 1, 2, ..., 1000 по порядку по кругу.

3. *Ответ*. Наибольший размер — $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$.

Решение. На рис. 18а отмечено расположение квадратов Карлсона, при котором Малыш, очевидно, не сможет подобрать квадрат со стороной более $\frac{1}{3}$. Осталось показать, что Малыш всегда сможет вырезать требуемый квадратик.



а) оценка сверху   б) оценка снизу

Рис. 18

Первый способ. Разобьем торт на 81 квадратик $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$. Каждый из квадратов Карлсона заденет не более 16 из этих квадратиков. Следовательно, хотя бы $81 - 4 \cdot 16 = 17$ квадратиков останутся целыми — один из них сможет вырезать Малыш.

Второй способ. На рис. 18б изображены пять кусочков торта размером $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ таких, что каждый из четырех квадратов Карлсона заденет не более одного из них. Следовательно, Малыш всегда сможет взять один из этих кусочков.

4. *Ответ*. 90°.

Решение. Обозначим центры двух равных окружностей, упомянутых в условии, соответственно I_B и I_C (см. рис. 19).

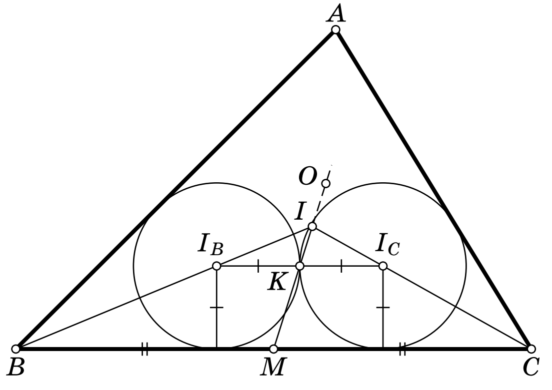


Рис. 19

Заметим, что $I_BI_C \parallel BC$, так как расстояния от точек I_B и I_C до прямой BC равны. Следовательно, $\angle II_BI_C = \angle IBC$ и $\angle II_CI_B = \angle ICB$, откуда следует, что треугольники I_BII_C и BIC подобны. Если мы теперь продолжим медиану IK треугольника I_BII_C до пересечения с BC в точке M, то IM, из подобия, будет медианой уже в треугольнике BIC. Но, согласно условию, это все та же прямая OI, т. е. M, O, и I лежат на одной прямой. Значит, либо прямая OM — серединный перпендикуляр к стороне BC, либо точки M и O совпадают.

В первом случае оказывается, что I лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC, откуда следует равенство углов $\angle IBC$ и $\angle ICB$ — но углы B и C соответственно в два раза больше их, а равнобедренность треугольника ABC запрещена условием.

Во втором случае получаем, что угол A прямой, так как опирается на диаметр BC описанной окружности треугольника ABC.

5. См. решение задачи 6 для 8 класса.

6. *Ответ.* Существуют.

Первое решение. Рассмотрим многочлен

$$P(x) = (1-x)\cdot(1-x^2)\cdot(1-x^4)\cdot\ldots\cdot(1-x^{2^{2016}}). \qquad (1)$$

Заметим, что при раскрытии скобок получатся 2^{2017} слагаемых вида $\pm\, x^n$, причем среди них не будет подобных. Действительно, если

$$\pm x^n = (-1)^m\cdot x^{2^{k_1}}\cdot x^{2^{k_2}}\cdot\ldots\cdot x^{2^{k_m}},$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — различные числа, то $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_m}$, а такой набор чисел $\{k_i\}$ единственен для данного n, так как соответствует представлению n в двоичной системе счисления — т. е. любая данная степень x^n, $n < 2^{2017}$, появится при раскрытии скобок ровно один раз, с коэффициентом $+1$ или -1.

Разложим многочлен на множители: $P(x) = Q(x)\cdot R(x)$, выделив сомножитель $(1-x)$ из каждого из членов произведения (1):

$$Q(x) = (1-x)^{2017},$$

$$R(x) = (1+x)\cdot(1+x+x^2+x^3)\cdot\ldots\cdot(1+x+\ldots+x^{2^{2016}-1}).$$

Легко видеть, что при раскрытии скобок у $Q(x)$ коэффициент при x будет равен -2017, а у $R(x)$, соответственно, 2016. Следовательно, многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ подходят.

Второе решение. Пусть мы нашли многочлены $P'(x) = Q'(x)\cdot R'(x)$ такие, что у P' нет коэффициентов больше 1 по модулю, а у Q' есть коэффициент больше 2015. Пусть степень многочлена P' меньше n; тогда многочлены $Q(x) = Q'(x^n)\cdot R'(x)$ и $R(x) = R'(x^n)\cdot Q'(x)$ подходят. Действительно, их произведением является многочлен $P(x) = P'(x^n) \times P'(x)$, каждый из коэффициентов которого является произведением некоторых двух коэффициентов P', а следовательно, они все не превосходят 1 по модулю. С другой стороны, каждый коэффициент многочлена Q равен произведению некоторых двух коэффициентов многочленов Q' и R', и один из этих коэффициентов окажется больше 2015 по модулю. (Аналогично для R.)

Осталось найти такие многочлены Q' и R'. Обозначим

$$T_s(x) = \frac{x^s - 1}{x - 1} = 1 + x + \ldots + x^{s-1}.$$

Пусть m и n — взаимно простые числа. Тогда многочлены T_n и T_m тоже взаимно простые. (Это легко следует из того факта, что $(x^m - 1, x^n - 1) = x^{(m,n)} - 1$.) Поскольку $x^n - 1$ и $x^m - 1$ оба делят $x^{mn} - 1$, то $T_n(x)$, $T_m(x)$ тоже делят $x^{mn} - 1$, а если m и n взаимно просты, $T_n(x) \cdot T_n(x)$ делит $x^{mn} - 1$. Далее заметим, что произведение $T_n(x) \cdot T_m(x)$ имеет коэффициент $\min(m, n)$ при слагаемом $x^{\min(m,n)-1}$. Следовательно, при $m, n > 2015$ и $(m, n) = 1$ подходят многочлены $Q'(x) = T_m(x) \cdot T_n(x)$ и $R'(x) = (x^{mn} - 1)/Q'(x)$.

10 класс

1. *Решение.* Рассмотрим разность двух соседних членов последовательности:

$$a_{n+1} - a_n = 1 + a_1 a_2 \ldots a_n - a_n.$$

Тогда, преобразуя, получаем

$$a_{n+1} - a_n = 1 - a_n + (a_1 a_2 \ldots a_{n-1}) a_n =$$
$$= 1 - a_n + (a_n - 1) a_n = 1 - 2a_n + a_n^2 = (1 - a_n)^2.$$

2. *Решение.* Рассмотрим какую-нибудь одну команду. Пусть после $2n - 2$ туров она имела $x - a$ очков, а за последний тур получила еще a очков. Тогда из условия получаем, что $\frac{x - a}{2n - 2} = \frac{x}{2n - 1}$, откуда после алгебраических преобразований получаем, что $x = a(2n - 1)$.

Таким образом, если команда проиграла в последнем раунде ($a = 0$), то суммарно она набрала 0 очков, т. е. проиграла все партии. Если выиграла ($a = 3$), то суммарно она набрала $3(2n - 1)$ очков, т. е. набрала максимально возможное количество очков, а значит, выиграла все партии. Если же последний раунд она сыграла вничью ($a = 1$), то суммарно она набрала $2n - 1$ очко.

Заметим, что команд, которые выиграли все партии, может быть не более одной. Аналогично, не может быть более одной команды, которая все партии проиграла. Поэтому в последнем раунде не могло быть больше одной результативной партии. Таким образом, возможны два варианта: либо все $2n$ команд набрали по $2n-1$ очку (в случае когда все игры последнего раунда окончились вничью), либо есть одна команда, которая выиграла у всех, одна команда, которая всем проиграла, а также $2n-2$ команды, которые набрали по $2n-1$ очку (если в последнем раунде была ровно одна результативная партия).

Посмотрим, как команда могла набрать $2n-1$ очко за $2n-1$ партию. Обозначим через w количество ее побед, через l — количество поражений, а через t — количество ничьих. Тогда, получаем, что $3w+t=2n-1$ и $w+l+t=2n-1$. Вычитая из первого равенства второе, получаем, что $l=2w$. т. е. если команда набрала $2n-1$ очко, то проигрывала она ровно в два раза чаще, чем выигрывала (или $w=l=0$).

Пусть не все команды сыграли вничью все партии. Покажем, что тогда суммарное количество поражений команд больше, чем суммарное количество побед. Поскольку эти два числа должны быть равны, мы придем к противоречию.

Действительно, пусть w_1, w_2, ... — количество побед команд, набравших по $2n-1$ очку. При этом не все w_i равны нулю. Тогда $2w_1$, $2w_2$, ...— количество поражений этих команд. Но тогда в случае, когда все команды набрали по $2n-1$ очку, суммарное количество поражений команд равняется $2(w_1+w_2+\ldots+w_{2n})$, а суммарное количество побед — $(w_1+w_2+\ldots+w_{2n})$, а в случае, когда $2n-2$ команды набрали по $2n-1$ очку, — $n+2(w_1+w_2+\ldots+w_{2n-2})$ и $n+(w_1+w_2+\ldots+w_{2n-2})$ соответственно. В обоих случаях суммарно количество поражений строго больше суммарного количества побед, что и требовалось.

Комментарий. Окончание решения могло быть другим: заметим, что суммарное количество набранных очков равняется $2n(2n-1)+r$, где r — количество результативных партий в турнире. Тогда, в случае если все команды набрали по $2n-1$ очку, получаем $2n(2n-1)+r=2n(2n-1)$, т. е. $r=0$. В случае, когда таких команд $2n-2$, имеем $2n(2n-1)+r=(2n-2)(2n-1)+3n$, откуда $r=2-n\leqslant 0$ при $n\geqslant 2$, что невозможно.

3. *Решение.* Докажем сперва, что такой треугольник существует. Рассмотрим поворотную гомотетию F с центром в начале координат, коэффициентом $\sqrt{2}$ и углом 45°. Заметим, что в координатах ее можно записать как $F\colon (x, y)\mapsto$

$\mapsto (x - y, x + y)$, т. е. образ целочисленной решетки снова лежит в целочисленной решетке. Образ любой фигуры имеет площадь вдвое большую, чем исходная фигура, так что образ треугольника относительно преобразования F удовлетворяет условию.

Заметим, что образ единичного квадрата, независимо от его цвета, имеет равные черную и белую часть площади, т. е. для него утверждение задачи верно. Следовательно, оно верно для любого прямоугольника с вершинами в узлах решетки и сторонами, параллельными осям координат. Заметим, что образ любого отрезка с концами в узлах решетки при отображении F имеет четную разность координат концов, так что середина такого отрезка — узел решетки. Значит, центр симметрии образа прямоугольника относительно F — узел решетки, а при центральной симметрии относительно любого узла черная клетка переходит в черную, а белая — в белую. Следовательно, образ относительно отображения F всякого прямоугольного треугольника в вершинами в узлах решетки и катетами, параллельными осям координат, имеет равные черную и белую площадь. Ну а любой треугольник можно получить, вырезав из прямоугольника несколько таких треугольников.

4. См. решение задачи 6 для 8 класса.

5. *Решение.* Проведем через точку P прямые PA' и PB' так, чтобы точки A' и B' лежали на BC и AC соответственно и прямые PA' и PB' были параллельны AC и BC соответственно (см. рис. 20). Заметим, что $\angle CAH = 90^\circ - \angle ACH = \angle QBC$.

Пусть R — точка пересечения прямых AC и HQ. Обозначим за D и E точки пересечения HQ с CM и BQ с AC соответственно. Треугольники RDC и QER — прямоугольные, поэтому $\angle ACP = 90^\circ - \angle DRC = \angle HQB$. Следовательно, треугольники APC и BHQ подобны по двум углам.

Пусть O — ортоцентр треугольника ABC. Тогда треугольники BHO и APB' тоже подобны, так как $\angle OHB = 90^\circ = \angle APB'$ и $\angle PAB' = \angle OBH$. Следовательно, $\frac{BO}{OQ} = \frac{AB'}{B'C}$. Далее, заметим, что $B'PA'C$ — паралеллограмм. Следовательно, середина N отрезка $A'B'$ лежит на PC. Но так как PC

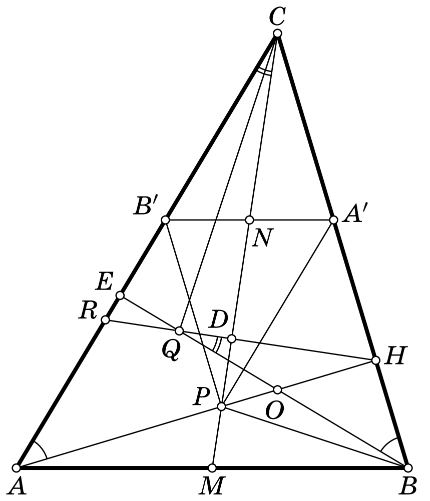


Рис. 20

лежит на медиане треугольника ABC, значит, отрезок $B'A'$ параллелен AB. Следовательно, $\frac{BA'}{A'C} = \frac{AB'}{B'C}$. Следовательно, так как $\frac{BO}{OQ} = \frac{AB'}{B'C} = \frac{BA'}{A'C}$, то, по теореме Фалеса, $A'O$ параллельно QC. Теперь рассмотрим треугольник OBA'. Заметим, что так как $A'P \parallel AC$, то $A'P \perp BQ$. Следовательно, так как $OH \perp BA'$, а $A'P \perp BO$, P — ортоцентр треугольника OBA', а значит, прямая $BP \perp A'O$, а значит, так как прямая $A'O \parallel QC$, получаем, что прямая $BP \perp QC$, что и требовалось доказать.

6. См. решение задачи 6 для 9 класса.

11 класс (1-й день)

1. *Ответ*. 17.

Решение. Заметим, что при всех натуральных n

$$a_{n+4} + a_n = a_{n+3} + a_{n-1} = \ldots = a_5 + a_1 = 25 + 1 = 26.$$

Следовательно, $a_n = 26 - a_{n+4} = 26 - (26 - a_{n+8}) = a_{n+8}$, т. е. последовательность (a_n) периодическая с периодом 8. Поскольку остаток от деления 2015 на 8 равен 7, $a_{2015} = a_7 = 26 - a_3 = 17$.

Комментарий. Периодичность последовательности (a_n) можно доказать и другими способами. Например, применяя несколько раз соотношение из условия задачи, получаем:

$$a_{n+4}+a_n=a_{n+5}+a_{n+1}=a_{n+6}+a_{n+2}=a_{n+7}+a_{n+3}=a_{n+8}+a_{n+4}.$$

Значит, $a_{n+4}+a_n=a_{n+8}+a_{n+4}$, откуда $a_{n+8}=a_n$ при всех натуральных n.

2. *Ответ.* 4545 рублей или 4995 рублей.

Решение. Пусть Миша потратил на смартфон $\overline{abcd}$ рублей (a, b, c, d — цифры, причем $a\neq 0$ и $d\neq 0$). Тогда получим уравнение $1{,}2\cdot\overline{abcd}=\overline{dcba}$, или $6\cdot\overline{abcd}=5\cdot\overline{dcba}$. Правая часть делится на 5, поэтому $d=5$. Следовательно,

$$6(1000a+100b+10c+5)=5(5000+100c+10b+a),$$
$$6(200a+20b+2c+1)=5000+100c+10b+a.$$

Заметим, что

$$1200a=5000+88c-110b+a-6\leqslant 5000+88\cdot 9+3=$$
$$=5795<6000,$$

поэтому $a<5$. С другой стороны,

$$1200a=5000+88c-110b+a-6\geqslant 5000-990-6=$$
$$=4004>3600,$$

откуда $a>3$. Значит, $a=4$. Остается найти все цифры b и c, удовлетворяющие уравнению $110b-88c=198$, т. е. $5b-4c=9=5+4$. Получаем $5(b-1)=4(c+1)$, откуда $b=5$, $c=4$ или $b=9$, $c=9$. В обоих случаях получаем сумму, удовлетворяющую условию задачи: 4545 рублей или 4995 рублей.

Комментарий. Отметим, что вывод о том, что $a=4$, можно сделать также и из следующего соображения: цифра a — четная (так как число $6\cdot\overline{abcd}=5\cdot\overline{dcba}$ четно) и меньше цифры $d=5$, но при $a=2$ получим $1{,}2\cdot\overline{2bc5}<1{,}2\cdot 3000=3600<\overline{5cb2}$.

3. *Первое решение.* Пусть точка P лежит на стороне AB, а точка Q — на стороне BC. Поскольку $PBQX$ — параллелограмм, $BP=QX$ и $\angle BAC=\angle QXC$. Треугольник ABC равнобедренный, поэтому $\angle BAC=\angle BCA$. Отсюда $\angle QXC=\angle BCA$ и $QX=QC$. Из того, что точки X и Y симметричны относительно PQ, также следует равенство $QX = QY$. Значит, точки X, C и Y лежат на одной окружности с центром в точке Q, поэтому $\angle CYX = \angle CQX/2 = \angle CBA/2$. Аналогично получаем, что $\angle AYX = \angle CBA/2$. Отсюда $\angle CYA = \angle CBA$ и, следовательно, точки A, B, C и Y лежат на одной окружности.

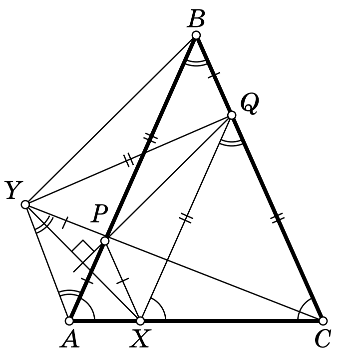


Рис. 21

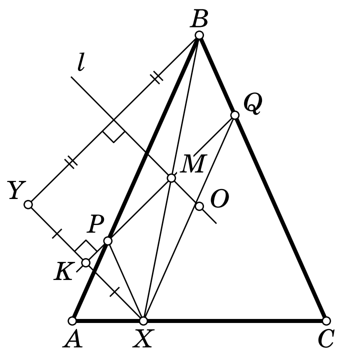


Рис. 22

Второе решение. Пусть точка P лежит на стороне AB, а точка Q — на стороне BC. По условию $PBQX$ — параллелограмм. Значит, отрезки BX и PQ пересекаются и делятся точкой M их пересечения пополам. Обозначим через K точку пересечения отрезка XY и прямой PQ. Из условия следует, что K — середина XY. Если точки M и K совпадают, то совпадают точки B и Y. В этом случае точка Y лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Если точки M и K различны, то MK является средней линией треугольника BXY (см. рис. 22). Точки M и K лежат на прямой PQ, поэтому отрезки MK и XY перпендикулярны, а отрезки PQ и BY параллельны. Обозначим через l серединный перпендикуляр к отрезку PQ. Прямая l проходит через точку M и параллельна отрезку XY, значит, она перпендикулярна к отрезку BY и делит этот отрезок пополам. Следовательно, точки B и Y симметричны относительно прямой l.

Обозначим через O центр описанной окружности треугольника ABC. Докажем, что прямая l проходит через точку O (см. рис. 23). Поскольку по условию $AB = BC$, серединный перпендикуляр к AC содержит биссектрису угла B

этого треугольника. Поэтому точка R, симметричная P относительно этого серединного перпендикуляра, лежит на стороне BC, причем $BP = BR$ и $OP = OR$. Поскольку $PBQX$ — параллелограмм, $BP = QX$ и $\angle BAC = \angle QXC$. Из равенства $AB = BC$ также следует равенство $\angle BAC = \angle BCA$. Отсюда $\angle QXC = \angle BCA$ и $QX = QC$. Получаем, что $BR = QC$, а точки R и Q симметричны относительно серединного перпендикуляра к BC. Значит, $OQ = OR = OP$ и точка O лежит на прямой l.

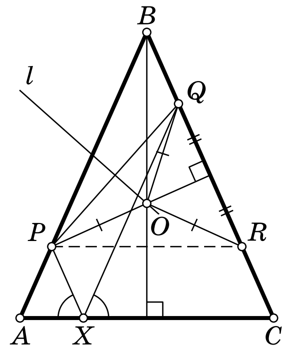


Рис. 23

По доказанному, при симметрии относительно прямой l описанная окружность треугольника ABC переходит в себя, а точка B — в точку Y. Значит, точка Y лежит на этой окружности.

Третье решение. Пусть снова точки P и Q лежат на сторонах AB и BC соответственно. Треугольник ABC равнобедренный, а прямые PX и BQ параллельны (по условию $PBQX$ — параллелограмм), поэтому $\angle BAC = \angle BCA = \angle PXA = \alpha$ (см. рис. 21). Значит, треугольник PXA также равнобедренный, $PA = PX$. Но $PX = PY$, так как точки X и Y симметричны относительно прямой PQ. Следовательно, треугольник PYA также равнобедренный, поэтому $\angle YAP = \angle AYP = \beta$.

Треугольники YPQ и BQP равны по трем сторонам, так как $PY = PX = BQ$, $QY = QX = BP$, а сторона PQ общая. Значит, точки B и Y находятся в одной полуплоскости от прямой PQ на одинаковом расстоянии, поэтому прямая BP параллельна прямой PQ. Следовательно, $BQPY$ — равнобедренная трапеция, а углы при ее основании BY равны: $\angle QBY = \angle PYB = \gamma$.

Наконец, в четырехугольнике $AYBC$ имеем:

$$\angle ACB + \angle AYB = \alpha + \beta + \gamma = \angle CAY + \angle CBY,$$

т. е. суммы противоположных углов равны (и, значит, равны по 180°). Таким образом, этот четырехугольник вписанный, откуда и следует утверждение задачи.

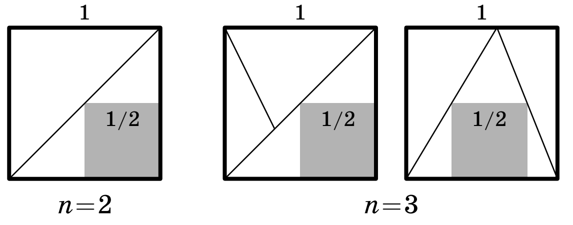


Рис. 24

4. *Решение*. При $n=2$ и $n=3$ утверждение задачи проверяется непосредственно (см. рис. 24). Пусть $n \geqslant 4$. Сумма площадей n треугольников, на которые разрезан единичный квадрат, равна 1, поэтому среди них найдется треугольник с площадью $S \geqslant 1/n$. Покажем, что этим треугольником можно накрыть квадрат со стороной $1/n$. Пусть a — наибольшая сторона выбранного треугольника, h — высота, опущенная на эту сторону. Рассмотрим квадрат, одна из сторон которого лежит на стороне a треугольника, а еще две вершины находятся на двух других сторонах (см. рис. 25). Противоположная сторона этого квадрата отсекает треугольник, подобный исходному с коэффициентом подобия $k=\dfrac{x}{a}=\dfrac{h-x}{h}$, где x — сторона квадрата. Из этого равенства находим $x=\dfrac{ah}{a+h}$.

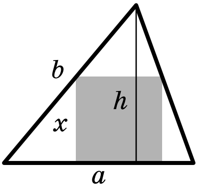


Рис. 25

Если $a+h \leqslant 2$, то в силу неравенства $S=\dfrac{ah}{2} \geqslant \dfrac{1}{n}$ получаем $x \geqslant \dfrac{2}{n} \cdot \dfrac{1}{a+h} \geqslant \dfrac{1}{n}$, откуда следует требуемое. Если же $a+h>2$, то $h>2-a \geqslant 2-\sqrt{2}$, так как $a \leqslant \sqrt{2}$ (сторона треугольника не превосходит диагонали исходного квадрата). Кроме того, заметим, что $a \geqslant h$. В самом деле, если b — какая-то другая сторона треугольника, то в силу выбора стороны a имеем $a \geqslant b$, но и $b \geqslant h$, так как b и h — соответственно гипотенуза и катет в прямоугольном треугольнике (если они не совпадают). Пользуясь этими неравенствами, находим:

$$x=\frac{1}{1/a+1/h} \geqslant \frac{h}{2} \geqslant \frac{2-\sqrt{2}}{2}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{n},$$

и снова получаем требуемое.

5. *Решение*. Предположим, что такая расстановка чисел возможна. Рассмотрим произвольный квадрат 2×2 указанного вида. Так как $|ad - bc| = 1$, то числа ad и bc имеют разную четность. Следовательно, среди чисел a, b, c и d есть по крайней мере одно четное и два нечетных числа, причем если в этом квадрате два четных числа, то они стоят по диагонали. Значит, четные числа не могут стоять в соседних по вертикали или горизонтали ячейках таблицы.

Таблица 8×8 состоит из 16 квадратов такого вида. Так как среди чисел от 1 до 64 ровно 32 четных и 32 нечетных, то в каждом из этих 16 квадратов должны быть записаны ровно два четных числа. Занумеруем эти 16 квадратов в произвольном порядке от 1 до 16. Определим для каждого из них свое число, равное дроби $\frac{ad}{bc}$, если четными являются числа a и d, и дроби $\frac{bc}{ad}$, если четными являются числа b и c. Обозначим через P_j число, которое получилось для квадрата под номером j. Пусть для определенности в квадрате под номером j четными являются числа a и d. Тогда из $|ad - bc| = 1$ следует

$$\frac{ad}{bc} = 1 \pm \frac{1}{bc} \leqslant 1 + \frac{1}{bc} < \left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) = \frac{(b+1)(c+1)}{bc}.$$

Значит, $P_j < Q_j$, где Q_j равно дроби, в знаменателе которой написано произведение двух нечетных чисел из квадрата j, а в числителе — произведение больших их на единицу четных чисел.

С одной стороны, имеем

$$P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_{16} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{64}{63},$$

так как в числителях дробей P_1, P_2, ..., P_{16} встретятся по одному разу все четные числа от 2 до 64, а в знаменателях — все нечетные числа от 1 до 63. С другой стороны, имеем

$$Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_{16} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{64}{63},$$

так как в знаменателях дробей Q_1, Q_2, ..., Q_{16} встретятся по одному разу все нечетные числа от 1 до 63, а в числителях — все четные числа от 2 до 64. Получаем противоречие, ведь по доказанному

$$P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_{16} < Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_{16}.$$

6. *Ответ*. Неверно.

Первое решение. Отличный от куба шестигранник, в каждой вершине которого сходятся по три ребра (назовем его *кубоидом*), можно получить из правильного тетраэдра следующим образом. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с центром O и правильный тетраэдр ACB_1D_1 (см. рис. 26). Две плоскости, параллельные $ABCD$ и касающиеся вписанной сферы тетраэдра ACB_1D_1, отсекают от этого тетраэдра две части. Оставшаяся часть тетраэдра представляет собой пример кубоида, удовлетворяющего условию задачи. Его вершины — это вершины двух прямоугольников (два сечения тетраэдра плоскостями), в силу симметрии все они равноудалены от центра куба O, который также является центром вписанной сферы для тетраэдра (а значит, и для построенного кубоида).

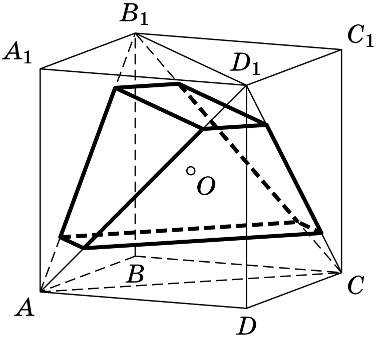


Рис. 26

Второе решение. Возьмем в некоторой плоскости прямоугольник с центром O и сторонами a и b ($b \geqslant a$), повернем его относительно точки O на 90° и поднимем на высоту h над этой плоскостью (см. рис. 27). Получим новый прямоугольник с центром O'. Восемь вершин двух прямоугольников (исходного и полученного) являются вершинами некоторого кубоида. Все эти вершины лежат на сфере с центром в

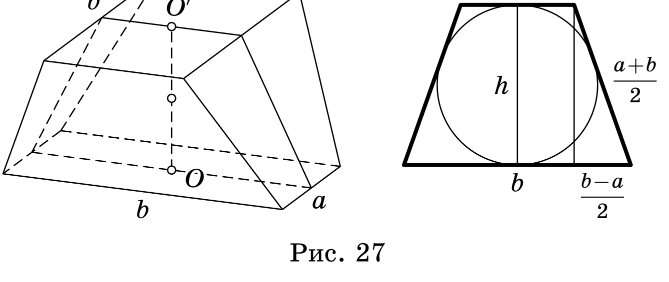


Рис. 27

середине отрезка OO'. Выберем h так, чтобы сфера с центром в середине отрезка OO' и радиуса $h/2$ касалась боковых граней кубоида. Для этого рассмотрим его сечение плоскостью, проходящей через прямую OO' параллельно какой-нибудь паре сторон прямоугольника. Оно представляет собой равнобедренную трапецию с основаниями a и b, в которую вписана окружность диаметра h. Боковые стороны этой трапеции равны $\frac{a+b}{2}$, поэтому

$$h = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

Отметим, что усеченный правильный тетраэдр из первого решения и куб — частные случаи построенного кубоида.

Комментарий. Разумеется, существует много других примеров.

11 класс (2-й день)

1. *Ответ.* Да.

Решение. Пусть исходные числа равны 32, 32, 32 и 4. Тогда их сумма равна 100. Поскольку $32^2 > 10^3$, получаем $\lg 32 > \lg 10^{3/2} = 1{,}5$. С другой стороны, очевидно, что $\lg 32 < \lg 100 = 2$. Следовательно, результат округления $\lg 32$ равен 2, значит, соответствующее новое число есть $10^2 = 100$.

Далее, поскольку $4^2 > 10$, получаем $\lg 4 > \lg 10^{1/2} = 0{,}5$, а так как $\lg 4 < \lg 10 = 1$, результат округления $\lg 4$ равен 1, значит, соответствующее новое число есть $10^1 = 10$.

Таким образом, сумма новых чисел равна 310, что превышает 300.

2. *Ответ.* 1007.

Решение. Заметим сначала, что множитель $\sin\frac{n\pi}{x}$ обращается в нуль только при $\frac{n\pi}{x} = \pi k$, т. е. $x = \frac{n}{k}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Среди этих значений натуральными будут только само число n и все его делители.

Разобьем множители вида $\sin\frac{n\pi}{x}$ в левой части уравнения на две группы: к первой отнесем множители, соответствующие числам n от 1 до 1007, а ко второй — числам n от 1008 до 2015. При вычеркивании любого множителя $\sin\frac{n\pi}{x}$

из второй группы натуральный корень исходного уравнения, равный n, не обращает в нуль больше никакой другой оставшийся множитель, поэтому такие множители вычеркивать без изменения числа натуральных корней нельзя. При вычеркивании же любого множителя из первой группы количество натуральных корней не изменяется, так как для любого натурального n, не превосходящего 1007, найдется множитель $\sin\frac{m\pi}{x}$ из второй группы, в котором m кратно n, так что он также обращается в нуль при тех натуральных значениях x, для которых $\sin\frac{n\pi}{x}=0$. Значит, все такие множители можно вычеркнуть без изменения числа натуральных корней исходного уравнения. Таким образом, искомое число множителей равно 1007.

3. *Ответ*. $a \neq 2/3$.

Решение. Если $a \leqslant 0{,}4$, то искомый раствор получается во втором сосуде после переливания из первого сосуда во второй $3a/2$ л обычной воды.

Пусть $0{,}4 < a < 2/3$. Перельем $1-a$ л воды из первого сосуда во второй и будем последовательно делать такие двойные переливания: из второго сосуда в первый до краев, а затем из первого во второй до краев. Если перед таким двойным переливанием во втором сосуде содержится x л живой воды и $1-x$ л обычной воды, а в первом сосуде, соответственно, $a-x$ л живой воды и x л обычной воды, то после первого переливания в первом сосуде станет $a-x+(1-a)x=a-ax$ л живой воды (и он будет полный), а во втором останется ax л живой воды. После второго переливания второй сосуд наполнится доверху, и живой воды в нем станет $ax+(1-a)(a-ax)=a^2x+a-a^2$ л.

Таким образом, количество a_n живой воды во втором сосуде после n-го двойного переливания выражается рекуррентно:

$$a_n = a^2 a_{n-1} + a - a^2, \qquad a_0 = a.$$

Из рис. 28, выражающего динамику a_n, видно, что числа a_n монотонно убывают к абсциссе $a/(1+a)$ пересечения прямых $y=a^2x+a-a^2$ и $y=x$.

Поскольку $a<2/3$, имеем $a/(1+a)<0{,}4$, и найдется такое k, что $a_k \leqslant 0{,}4 < a_{k-1}$. Тогда, прерывая второе перели-

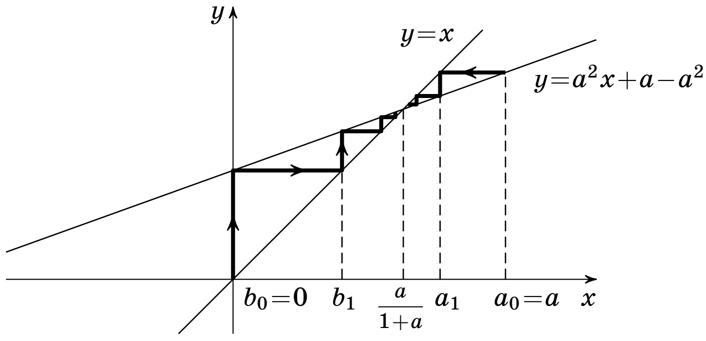


Рис. 28

вание в k-м двойном переливании в нужный момент, мы получим искомый 40-процентный раствор во втором сосуде (возможно, неполном).

Пусть теперь $2/3 < a < 1$. Будем последовательно делать такие двойные переливания: из первого сосуда во второй до краев, а затем из второго в первый до краев. Аналогично предыдущему показывается, что количество b_n живой воды в первом сосуде после n-го такого двойного переливания выражается рекуррентно:

$$b_n = a^2 b_{n-1} + a - a^2, \quad b_0 = 0.$$

Из рис. 28 видно, что числа b_n монотонно возрастают к той же абсциссе $a/(1+a)$ пересечения прямых $y = a^2x + a - a^2$ и $y = x$. Поскольку $a > 2/3$, имеем $a/(1+a) > 0{,}4$, и найдется такое k, что $b_{k-1} < 0{,}4 \leqslant b_k$. Тогда, прерывая второе переливание в k-м двойном переливании в нужный момент, мы получим искомый 40-процентный раствор живой воды в первом сосуде (возможно, неполном).

Наконец, покажем, что при $a = 2/3$ требуемый раствор нельзя получить ни в одном из сосудов. Предположим противное: такой раствор получился в результате каких-то переливаний в одном из сосудов — скажем, в первом, — впервые. Тогда во втором сосуде раствор не 40-процентный, так как при последнем переливании (из второго сосуда в первый) процентное содержание живой воды во втором сосуде не менялось. Но если в первом сосуде получилось x л 40-процентного раствора живой воды, т. е. $0{,}4x$ л живой и $0{,}6x$ л обычной воды, то во втором сосуде живой воды $2/3-0{,}4x$ л, а обычной воды $1-0{,}6x$ л, т. е. в нем тоже 40-процентный раствор живой воды. Противоречие.

4. *Ответ*. В 2047 году.

Решение. Поставим в соответствие январю каждого года упорядоченный набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из $n=31$ нулей и единиц следующим образом: если k-го января день был ясным, то $a_k=1$, иначе $a_k=0$. По условию, 1 января день всегда ясный, поэтому $a_1=1$. Выясним, как по набору $a=(1, a_2, \ldots, a_n)$, соответствующему январю текущего года, получить такой набор для января следующего года. Согласно теории анчурийских ученых, этот набор выглядит следующим образом: $f_1(a)=(1, 1\oplus a_2, a_2\oplus a_3, \ldots, a_{n-1}\oplus a_n)$, где через $x\oplus y$ обозначен остаток от деления на 2 числа $x+y$ (сумма по модулю 2). Поскольку $x\oplus x=0$, через 2 года погоду в январе будет описывать набор

$$f_2(a)=f_1(f_1(a))=(1, a_2, 1\oplus a_3, a_2\oplus a_4, \ldots, a_{n-2}\oplus a_n),$$

через 4 года — набор

$$f_4(a)=f_2(f_2(a))=\\=(1, a_2, a_3, a_4, 1\oplus a_5, a_2\oplus a_6, \ldots, a_{n-4}\oplus a_n),$$

через 8 лет — набор

$$f_8(a)=f_4(f_4(a))=\\=(1, a_2, a_3, \ldots, a_8, 1\oplus a_9, a_2\oplus a_{10}, \ldots, a_{n-8}\oplus a_n),$$

и т. д. Вообще, если $N=2^m<n$, через N лет погоде в январе будет соответствовать набор

$$f_N(a)=f_{N/2}(f_{N/2}(a))=\\=(1, a_2, a_3, \ldots, a_N, 1\oplus a_{N+1}, a_2\oplus a_{N+2}, \ldots, a_{n-N}\oplus a_n).$$

Этот набор еще не совпадает с набором a, так как $1\oplus a_{N+1}\neq\neq a_{N+1}$. Если же $2N=2^{m+1}\geqslant n$, то получим

$$f_{2N}(a)=f_N(f_N(a))=(1, a_2, a_3, \ldots, a_n)=a,$$

т. е. погода через $2N$ лет будет меняться ровно так же, как и в январе текущего года, где $N=2^m<n\leqslant 2^{m+1}=2N$.

Заметим, что если T — наименьший период, с которым повторяется такой набор a, то любой период T_1 делится на T.

Действительно, в противном случае число НОД$(T, T_1) < T$ также является периодом, что противоречит тому, что период T — наименьший. В частности, на T делится число $2N = 2^{m+1}$, а значит, T — степень двойки. Как показано выше, степени двойки, меньшие $2N$, периодами не являются, поэтому $T = 2N$. Таким образом, через $2N$ лет набор a повторится впервые.

При $n = 31$ имеем $N = 2^4 = 16 < n = 31 \leqslant 2N = 32$, поэтому набор, описывающий погоду в 2015 году, повторится впервые ровно через 32 года — в 2047 году.

Комментарий. Ответ на вопрос задачи можно получить и следующим образом. Сопоставим набору погоды текущего года $a = (1, a_2, \ldots, a_n)$ из нулей и единиц многочлен $P(x) = 1 + a_2x + \ldots$ $\ldots + a_nx^{n-1}$. Тогда набору следующего года будет соответствовать остаток $P_1(x)$ от деления многочлена $(1 + x)P(x)$ на x^n (здесь и далее все коэффициенты многочленов рассматриваются по модулю 2, т. е. все четные заменяются на нули), а через k лет погоду описывает многочлен $P_k(x)$, являющийся остатком от деления $(1 + x)^kP(x)$ на x^n. Таким образом, задача сводится к тому, чтобы найти наименьшее k, для которого $P_k(x) = P(x)$, т. е. $((1+x)^k - 1)P(x)$ делится на x^n. Нетрудно показать по индукции, что $(1+x)^{2^m} = 1 + x^{2^m}$. Если $2^m < n$, то $((1+x)^{2^m} - 1)P(x) = x^{2^m}P(x)$ не делится на x^n, так как свободный коэффициент многочлена $P(x)$ равен единице. Если же $2^{m+1} \geqslant n$, то $((1+x)^{2^{m+1}} - 1)P(x) =$ $= x^{2^{m+1}}P(x)$ уже делится на x^n, т. е. число 2^{m+1} является периодом. Остается заметить, что он будет наименьшим, так как наименьший период является делителем любого другого, а меньшие степени двойки периодами не являются.

Рассмотренный многочлен $P(x)$ представляет собой пример *производящей функции*. Такая функция однозначно определяется данной последовательностью, и наоборот. Идея о том, что исследовать свойства последовательностей можно, изучая свойства их производящих функций, широко применяется в различных областях математики.

5. *Ответ*. 4.

Решение. Если материки представляют собой вершины правильного тетраэдра, вписанного в сферу, то особых точек ровно 4 — это концы радиусов, проведенных из центра сферы через центры граней тетраэдра.

Покажем, что 5 и более особых точек не может быть ни при каком расположении четырех материков. Пусть A —

особая точка, r — расстояние от A до ближайших к ней точек суши (не менее трех из которых по условию лежат на разных материках). Точки океана, удаленные от точки A менее чем на r, образуют сферическую «шапочку» $H(A)$. При этом сферические дуги AX и BY, идущие от разных особых точек A и B к каким-то ближайшим к ним точкам суши X и Y соответственно, могут пересекаться только по концевым точкам, то есть в случае $X=Y$.

Пусть есть 5 особых точек $A_1, \ldots, A_5$. Тогда у каждой из них есть меньшая сферическая «шапочка» $H'(A_i)$, не пересекающаяся ни с какой сферической дугой A_jX, где $j \neq i$ и X — точка суши, ближайшая к A_j (см. рис. 29). Можно считать, что «шапочки» $H'(A_i)$ попарно не пересекаются и не касаются.

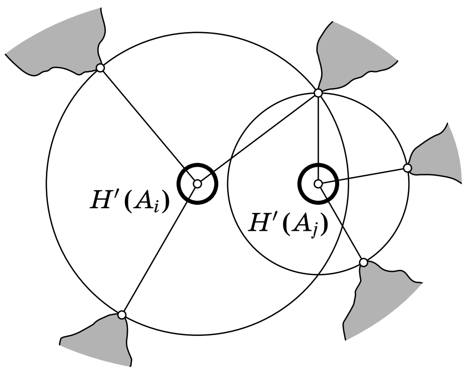


Рис. 29

Добавляя к каждому материку все части дуг A_jX, идущие от его точек X до границ «шапочек» $H'(A_j)$, получим новые материки, которые по-прежнему разделены океаном, для которых точки $A_1, \ldots, A_5$ по-прежнему особые (другие особые точки могут исчезнуть) и при этом новые сферические «шапочки» $H'(A_j)$ не пересекаются и не касаются.

Для каждой из точек $A_1, \ldots, A_5$ зафиксируем тройку материков, доходящих до границы ее новой «шапочки». Каким-то двум из них (скажем, A_1 и A_2) соответствует одна и та же тройка материков. Эти материки делят область, ограниченную окружностями «шапочек» $H'(A_1)$ и $H'(A_2)$, на три или более подобластей (если внутри материков есть заполненные океаном «дырки», то таких подобластей может быть сколько угодно), и четвертый материк целиком лежит в одной из этих подобластей. Назовем эту подобласть Ω.

Все точки A_3, A_4, A_5 лежат в Ω (другие подобласти заполнены океаном и граничат не более чем с двумя материками), и каждой из них соответствует одна и та же тройка материков (четвертый и те два из первых трех, которые граничат с Ω). Каждый материк из этой тройки соединяет какие-то две точки на окружностях «шапочек» $H'(A_3)$ и $H'(A_4)$, поэтому океан в разности $\Omega \setminus (H'(A_3) \cup H'(A_4))$ разбит на подобласти, каждая из которых граничит не более чем с двумя материками. Ни в одной из этих подобластей точка A_5 лежать не может. Противоречие.

6 класс (*2581 работа*)

	1	2а	2б	3	4	5	6
0	1439	1244	2041	1230	1096	2203	1832
1	10	3	308	658	35	125	530
2	28	1	145	234	5	7	120
3	1104	1333	87	47	1	14	21
4				66	8	157	8
5				346	3	31	15
6					1433	4	9
7						2	12
8						38	34

7 класс (*1827 работ*)

	1	2	3	4	5	6
0	271	926	702	1567	880	1771
1	298	149	0	55	95	0
2	163	80	1	132	66	0
3	5	80	1	11	763	2
4	1090	592	3	4	4	0
5			1120	3	10	3
6				55	1	0
7					0	0
8					8	51

8 класс (*914 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	425	96	85	61	9	17
$\pm$	27	2	0	6	1	2
$\mp$	26	11	5	9	1	42
$-$	383	344	323	518	323	411
0	53	461	501	320	580	442

9 класс (*588 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	359	150	66	41	37	0
$+.$	0	16	8	3	2	0
$\pm$	78	23	7	2	9	0
$\mp$	0	11	173	17	48	0
$-.$	1	8	12	44	13	0
$-$	119	324	304	110	236	238
0	31	56	18	371	243	350

10 класс (*582 работы*)

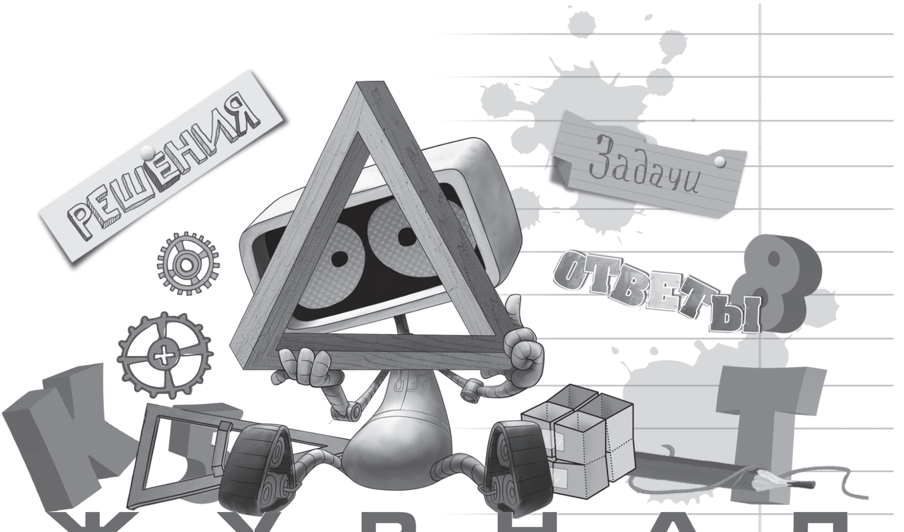
	1	2	3	4	5	6
$+$	411	76	21	47	9	4
$\pm$	3	25	11	11	1	1
$\mp$	1	92	52	11	2	0
$-$	127	295	288	216	172	186
0	40	94	210	297	398	391

11 класс, первый день (*641 работа*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	268	316	183	13	0	11
$\pm$	264	104	21	11	0	5
$\mp$	27	164	37	27	91	11
$-$	82	57	400	590	550	614

11 класс, второй день (*382 работы*)

	1	2	3	4	5
$+$	315	250	10	14	2
$\pm$	12	35	6	7	6
$\mp$	7	30	40	85	23
$-/0$	48	67	326	276	351



ЖУРНАЛ
КВАНТИК
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ ИЛЛЮСТРИРОВАННЫЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ ШКОЛЬНИКОВ 4–8 КЛАССОВ

Журнал посвящён занимательным вопросам и задачам по математике, лингвистике, физике и другим естественным наукам.

Из «Квантика» можно узнать много интересного об окружающем мире. Мы публикуем занимательные задачи и головоломки, физические и химические опыты, интересные рассказы обо всём на свете, олимпиады и конкурсы, математические комиксы и многое другое!

Объём 32 стр., выходит ежемесячно.

Подписаться на «Квантик» можно в любом отделении почты России, подписной индекс **84252** по каталогу Роспечати**.**

Список точек продаж и другую полезную информацию вы можете найти на сайте kvantik.com

Пишите: kvantik@mccme.ru
Наш блог: kvantik12.livejournal.com
Будьте Вконтакте: vk.com/kvantik12
Ищите Квантик в AppStore

Электронная версия: pressa.ru/magazines/kvantik

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

является ведущим учебно-научным центром в области математики и механики. На факультете действуют научные школы, возглавляемые учеными самого высокого класса. Учебные планы факультета охватывают все современные направления математики и механики. Диплом механико-математического факультета признан во всем мире. Выпускники факультета трудятся во всех крупных научно-исследовательских центрах, учебных и иных учреждениях, не обязательно непосредственно связанных с математикой и механикой. На мехмате учат не столько рецептам решения конкретных задач, сколько умению думать самостоятельно, а также извлекать знания из разных источников. Именно это позволяет выпускникам факультета быстро включаться и быть эффективными практически в любой иной сфере деятельности — от компьютерной или финансовой до управления производством и политики.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ВШЭ

Факультет математики — небольшой молодой математический факультет, ориентированный на исследования. Преподают на факультете ведущие математики Москвы, активно разрабатывающие собственные направления. Особенное внимание уделяется современным направлениям в алгебре, топологии, алгебраической геометрии, математической физике. Студенты факультета получают широкую базовую математическую подготовку. Это даст выпускникам свободу выбора последующей специализации, а приобретенные исследовательские навыки пригодятся вне зависимости от специальности.

По окончании программы бакалавриата выпускники смогут совершенствоваться в магистратуре и аспирантуре факультета математики, а также других факультетов ВШЭ и других ведущих вузов России и мира.

Высшая школа экономики — государственный университет. Студенты получают отсрочку от призыва в вооруженные силы. В университете имеется военная кафедра. Иногородние студенты обеспечиваются общежитием.

Подробную информацию о факультете и преподавателях см. на сайте math.hse.ru.

Вопросы задавайте по электронной почте math@hse.ru.

БИБЛИОТЕКА САЙТА Math.Ru
www.math.ru/lib

В этой библиотеке вы найдете и самые первые российские учебники математики («Арифметика» Л. Ф. Магницкого и геометрия Я. В. Брюса), и научно-популярную литературу советского периода, а также интересные книги современных ученых (всего около 500 книг).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ
www.etudes.ru

На сайте представлены этюды, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и ее приложениях. Приглашаем совершить познавательные экскурсии по красивым математическим задачам. Их постановка понятна школьнику, но до сих пор некоторые задачи не решены учеными.

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ»
www.problems.ru

Все задачи Московских олимпиад (с 1935 г.) размещены на сайте www.problems.ru

Первые научно-популярные журналы начали выходить в России более двух веков назад. На их статьях выросло не одно поколение российских ученых, инженеров, просто думающих и читающих людей самых разных родов занятий. Сейчас старые номера этих журналов доступны читателям лишь в ничтожном числе библиотек. Электронные архивы призваны сделать их материалы доступными для широкой аудитории.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ (1886—1917)

vofem.ru

журнал, фактически заложивший традиции жанра в литературе на русском языке. За 31 год его существования вышло 674 выпуска В.О.Ф.Э.М.

На страницах журнала печатались и научные статьи, и, например, задачи для учеников и для учителей, научная хроника, обзоры издаваемой литературы и многое другое. Среди постоянных рубрик журнала были, например: «Статьи, посвященные вопросам преподавания математики и физики», «Опыты и приборы», «Математические мелочи», «Библиографический отдел».

Статьи составлялись настолько популярно, насколько это возможно без ущерба для научной стороны дела.

ЖУРНАЛ «ПРИРОДА» (1912—)

priroda.ras.ru

Ежемесячный научно-популярный журнал Российской академии наук (РАН) «Природа» — одно из старейших в России изданий. Первый номер этого журнала вышел в 1912 году.

Фактически перед вами огромная энциклопедия по естественным наукам, составленная и регулярно пополнявшаяся отечественными учеными на протяжении 100 лет.

ЖУРНАЛ «КВАНТ» (1970—)

kvant.ras.ru

Первый номер «Кванта» вышел в январе 1970 года. Материалы, накопленные в журнале с этого времени, бесценны. Не раз доводилось спрашивать молодых ученых, многого добившихся в науке, и замечательных учителей: «Что повлияло на выбор профессии?» Ответы почти всегда были одни и те же: Учитель (школьный учитель, сумевший увлечь своим предметом) и «Квант».

ТРИНАДЦАТАЯ ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 8—11 КЛАССОВ

состоится 12 апреля 2015 года

Олимпиада рассчитана на школьников, успешно выступающих в городских математических олимпиадах, а также на школьников, увлекающихся геометрией.

Олимпиада по геометрии проводится в рамках Девятой Всероссийской олимпиады по геометрии памяти Игоря Федоровича Шарыгина. В ней могут принять участие школьники 8—11 классов. Призеры олимпиады будут награждены дипломами оргкомитета и математической литературой. Победители олимпиады — учащиеся 8—10 классов — будут приглашены на финальный тур Всероссийской олимпиады по геометрии им. И. Ф. Шарыгина, который состоится в июле 2015 года в г. Дубне под Москвой.

Для участия в олимпиаде необходима предварительная регистрация. Подробности на сайте

olympiads.mccme.ru/ustn

ВЫЕЗДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ

Подробную оперативную информацию о выездных математических и околоматематических школах смотрите на странице www.mccme.ru/leto

Пятнадцатая летняя школа «СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»

пройдет с 18 по 29 июля 2015 года в Дубне (на базе дома отдыха «Ратмино») для старших школьников (окончивших 10 или 11 класс) и студентов младших курсов (окончивших I или II курс).

Математики крупнейших научных и учебных центров проведут в рамках школы лекционные и семинарские учебные курсы для старших школьников и студентов младших курсов. Не менее важным, чем сами занятия, будет живое общение школьников и студентов с академиками и профессорами, общение, позволяющее обсудить интересный вопрос, получить квалифицированный ответ от занимающегося данным разделом старшего — просто «приобщиться к большой науке». Слушатели смогут получить конкретные ориентиры в разных областях науки, что поможет им выбрать себе сферу интересов.

Отличительной чертой школы является как высочайший научный уровень преподавателей, так и очень высокий уровень участников. Если вы хотите участвовать в работе школы, присылайте в Оргкомитет до 10 мая заполненную анкету участника. (Персонально приглашаются на школу обладатели дипломов I—II степени в параллели 10 и 11 классов на этой или предыдущей ММО.)

Председатель научного комитета школы — профессор А. Б. Сосинский.

Предварительное согласие провести занятия на школе дали академик РАН В. А. Васильев, чл.-корр. РАН Д. О. Орлов, А. А. Разборов и И. А. Панин, проф. А. Б. Сосинский, В. М. Тихомиров, М. Э. Казарян, С. К. Ландо, А. М. Райгородский, А. И. Буфетов, а также В. А. Клепцын, М. А. Раскин, Г. Ю. Панина, И. В. Ященко и другие.

Материалы прошедших школ и информацию о ЛШСМ-2015 смотрите на сайте

`www.mccme.ru/dubna`

Контактный e-mail оргкомитета: `dubna@mccme.ru`

ИНФОРМАЦИЯ О НАБОРЕ
в московские специализированные школы и классы на 2015/2016 учебный год

Школа	Телефон, URL	Адрес	Классы
2	(499) 137-17-69 www.sch2.ru	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская»)	6, 7 физ.-мат.; добор в 8—10 физ.-мат.
54	(499) 245-99-72 (499) 245-54-25 moscowschool54.ru	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная»)	8 матем.; добор в 10 матем.
57	(495) 691-85-72 (495) 691-54-58 sch57.ru	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая»)	8, 9 матем., 9 гум., биол.
91	(495) 690-35-58 91.ru	ул. Поварская, 14 (м. «Арбатская»)	5—9 матем.
179	(495) 692-48-51 www.179.ru	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд»)	6 изобр., 7—9 матем.
192	(499) 137-33-55 (499) 137-72-85 www.sch192.ru	Ленинский просп. 34-А (м. «Ленинский просп.»)	5 ест.-науч., 7 био.-хим. и физ.-мат., добор в 8—10
218	(499) 976-19-85 blinkov@mccme.ru school218.ru	Дмитровское ш., 5а (м. «Дмитровская»)	8 (индивид. уч. план); добор в 9, 10 (ИУП)
444	(495) 465-23-52 (495) 465-60-52 schv444.mskobr.ru	ул. Ниж. Первомайская, 14 (м. «Первомайская»)	5, 7, 8; добор в 6, 10 физ.-мат.
1303	(495) 362-34-40 www.1303.ru lycg1303.mskobr.ru	Таможенный проезд, 4 (м. «Площадь Ильича», «Римская»)	9 физ.-мат., хим.; добор в 10 физ.-мат.
1329	sch1329.mskobr.ru	Никулинская улица, 10 (м. «Юго-Западная»)	6 физ.-мат.
1534	gym1534.ru gym1534@mail.ru	ул. Кедрова, 11 (м. «Академическая»)	5, 7 матем.; добор в 7—9 матем., 8—10 физ.-мат. и биол.-хим.
1543	(495) 433-16-44 (495) 434-26-44 www.1543.ru	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная»)	8 матем., физ.-хим., биол., гум.
2007	(495) 716-29-35 fmsh2007.ru	ул. Горчакова, 9, корп. 1 (м. «ул. Горчакова»)	5—10
«2×2»	mathbaby.ru nabor@mathbaby.ru		5—8 матем., 7, 8 физ.
Интеллектуал	(499) 445-52-10 sch-int.ru	ул. Кременчугская, 13 (м. «Славянский бульвар»)	5; добор в 6—10 (индивид. уч. план)
Курчатовская школа	(499) 194-10-44 kurchat.mskobr.ru	ул. Маршала Василевского, 9, к. 1 (м. «Щукинская»)	5 матем., 7, 10 физ.-мат.; добор в 11 физ.-мат.
СУНЦ	(499) 445-11-08 internat.msu.ru	ул. Кременчугская, 11 (м. «Славянский бульвар», «Кунцевская»)	10 физ.-мат., комп.-инф., хим., биол., 11 физ.-мат.

ОГЛАВЛЕНИЕ

LXXVIII Московская математическая олимпиада
Задачи и решения

Подписано в печать 24/III 2015 г.
Формат бумаги 60 × 90/16. Объём 3 печ. л.
Гарнитура Школьная. Тираж 1000 экз. Заказ .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-74-83

LXXVIII Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

Москва
Издательство МЦНМО
2015

Книгоиздательство научныхъ и популярно научныхъ сочиненій изъ области физико-математическихъ наукъ

maTHesis.ru

Одесское издательство «Mathesis» с 1904 по 1925 год выпускало удивительно интересные книги. Некоторые из них стали классикой, часть сейчас незаслуженно забыта.

Ясность и доступность изложения, подбор научно-популярных книг поможет лучше понять математику, физику, астрономию, другие естественные науки, а также историю их познания.

Чтение этих книг заведомо будет полезно молодому поколению, а также тем, кто занимается его образованием и воспитанием.

К 2014 году электронная коллекция собрана практически полностью и выпущена на диске локальная версия архива.

МЕХАНИЗМЫ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

tcheb.ru

В проекте собираются все механизмы, созданные Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821—1894), великим российским математиком. Задача проекта — навсегда сохранить уникальное наследие путем создания высокоточных компьютерных моделей уцелевших механизмов, воссоздать уже утраченные по архивным документам. По договоренности с музеями моделирование производится на основе тщательного измерения всех параметров оригиналов.

РАСПИСАНИЕ МЕРОПРИЯТИЙ
29 марта 2015 года

Время	Мероприятие	Место проведения (аудитория ГЗ)			
		8 класс	9 класс	10 класс	11 класс
15^{00}	Показ работ	14 этаж	13 этаж	16 этаж	12 этаж
16^{30}	Лекция М. И. Зеликина в ауд. 16–10				
18^{00}	Торжественное закрытие, награждение победителей	ауд. 02 (1 этаж)			

Награждение наградами награжденных, не награжденных наградами на награждении, будет происходить по средам с 15^{00} до 19^{00} в МЦНМО (Большой Власьевский пер., 11).
www.mccme.ru, mmo@mccme.ru

СХЕМА ПРОЕЗДА В МЦНМО