Решения Московской астрономической олимпиады 2013-14 учебного года.
10-11 классы.

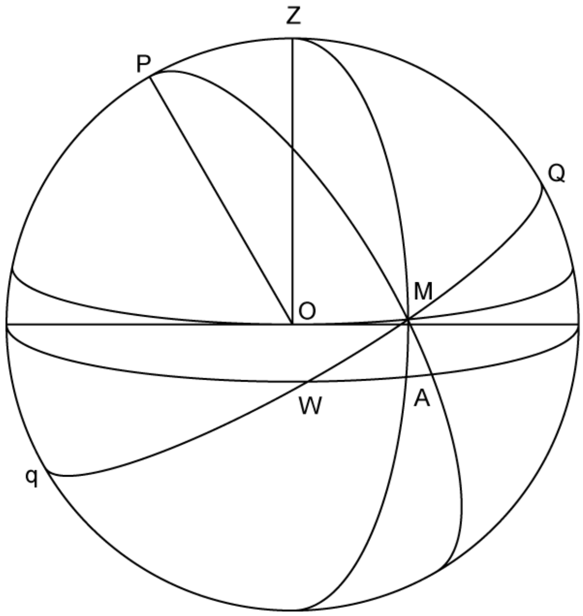
Короткие задачи.

1.

Телескоп, установленный на широте 45°, может наводиться на объекты не ниже 15° над горизонтом. Определите, как долго в течение ночи будут этому телескопу доступны светила на небесном экваторе?

<u>Решение</u>

Для решения задачи определим часовой угол t светила M в момент его нахождения на критической высоте h = 15°.



Вариант 1. Построим сферический треугольник MWA. В этом треугольнике сторона MW - дуга небесного экватора, равная 90° - t; сторона MA – дуга вертикала светила равная h, а сторона WA – дуга горизонта. Угол при вершине A очевидно равен 90°, а угол при вершине W равен 90° - φ, где φ – широта. Применяя теорему синусов для такого треугольника получим:

$$\frac{\sin(90° - \mathrm{t})}{\sin 90°} = \frac{\sin h}{\sin(90° - \varphi)}$$

Отсюда

$$\cos t = \frac{\sin h}{\cos \varphi}$$

Подставляя значения, получаем

t = 68°,5

Вариант 2. Рассмотрим параллактический треугольник PZM. Здесь PZ – дуга небесного меридиана, равная 90° - φ, ZM – зенитное расстояние светила, равное z = 90° - h, а PM – полярно расстояние светила, равное, очевидно 90°. Угол при вершине P равен часовому углу светила. Воспользуемся теоремой косинусов для сферических треугольников:

$$\cos(90° - \mathrm{h}) = \cos 90° \cos(90° - \varphi) + \sin 90° \sin(90° - \varphi) \cos t = \cos\varphi \cos t$$

Мы получили формулу, идентичную той, что была получена в 1-м варианте.

Найденный часовой угол соответствует дуге от кульминации до критической высоты. Полная дуга, которую проходит светило, оставаясь в зоне видимости телескопа равна удвоенному часовому углу. Переведем эту величину во время, принимая во внимание тот факт, что небесная сфера вращается с периодом, равным звездным суткам:

$$T = 2t \cdot \frac{23^h 56^m}{360°} = 9^h 6^m$$

2.

Под эффективным радиусом галактики понимают такое расстояние, на котором ее поверхностная яркость равна 25^m с квадратной секунды. Известно, что поверхностная яркость падает экспоненциально от центра по закону $I=I_0 * e^{-r/h}$, где h – расстояние от центра, на котором поверхностная яркость уменьшается в e раз. Пусть некоторая галактика расположена на расстоянии 3 Мпк от нас, имеет поверхностную яркость в центре 20^m, h = 2кпк. Какие угловые размеры имеет эффективный радиус этой галактики?

Решение:

Обозначим за μ_1 поверхностную яркость центра галактики, а за μ_2 поверхностную яркость на ее границе. Запишем формулу Погсона:

$\frac{I_2}{I_1}=e^{-r/h} = 10^{0,4(\mu 1-\mu 2)}$, где I_1и I_2 - световые потоки от центра галактики и точки на ее границе соответственно. Из формулы найдем расстояние r – расстояние от центра галактики до точек, которые мы считаем граничными точками при наблюдениях.

$r= - h \cdot \ln(10^{0,4(\mu_1-\mu_2)}) = -h \cdot 0,4(\mu_1 - \mu_2)\ln 10 \approx 9,2$кпк

Видимые угловые размеры радиуса r равны:

$$\alpha=\frac{r}{d}3438' \approx 10'5$$

3.

При проведении наблюдений в субмиллиметровой области спектра небольшим, но чувствительным телескопом возникает «проблема путаницы»: источников на небе так много, что трудно понять, где один, а где несколько. Этими источниками являются очень далекие галактики (на расстояниях несколько гигапарсек). Оцените примерно полное количество источников на небе, при котором проявляется этот эффект для космического телескопа ГЕРШЕЛЬ диаметром 3.5 м при наблюдениях на длине волны 250 мкм.

Решение:

L = 250 мкм, D = 3.5м.

Т.к. галактики далекие, их можно считать точечным объектами, и площадь каждой галактики не учитывать. (Можно оценить: размер галактики 10 кпк, расстояние 1 Гпк, угол 10^-5 рад, разрешение телескопа L/D ~ 7*10^-5 > 10^-5)

A = (L/D)^2 -- грубо, площадь диаграммы направленности телескопа.

Число источников N ~ 4 * pi / A = 2.5 * 10^9

P.S. Точное решение этой задачи учитывает вероятность не различить два источника по критерию Рэлея и требует применения статистики Пуассона. При вероятности 10% 1 источник должен приходиться на примерно 20 диаграмм направленности, т. е. ответ будет в 20 раз меньше.

P.S. 2 Для упрощения задачи можно явно написать, что галактики можно считать точечными: «Этими источниками являются очень далекие галактики (на расстояниях несколько гигапарсек), поэтому их можно считать точечными.»

4.

Инопланетяне решили столкнуть объект пояса Койпера на Солнце, остановив его орбитальное движение. С какой точностью (относительной ошибкой) они должны передать импульс этому объекту, если он вращался по круговой орбите со скоростью V.

Решение:

Для того, чтобы некий объект Солнечной системы упал точно на Солнце, необходимо, чтобы его тангенциальная скорость стала равной нулю. Поскольку изначально наш объект двигался по круговой орбите со скоростью V, значит его нужно остановить, придав скорость (или импульс) равную по величине и обратную по направлению имеющейся. В случае если переданная скорость окажется не в точности равна скорости объекта, а будет отличаться на величину ΔV, то объект начнет двигаться по эллиптической орбите, а ΔV будет его афелийной скоростью.

Пусть R – радиус орбиты объекта. Он попадет в Солнце, если перигелий его орбиты будет не больше радиуса Солнца (R_s). В граничном случае большая полуось орбиты будет равна

$$a = \frac{R_s + R}{2}$$

Скорость тела на любом участке эллиптической орбиты равна

$$V = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

где r – расстояние от фокуса. Для афелия формула приобретает вид

$$\Delta V = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R} - \frac{2}{R_s + R}\right)} = \sqrt{GM\frac{2R_s}{R(R + R_s)}} \approx V\sqrt{\frac{2R_s}{R}}$$

Наконец, относительная ошибка будет равна

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \sqrt{\frac{2R_s}{R}}$$

Объекты пояса Койпера в основной массе располагаются на расстояниях от 30 до 60 а. е. Значит, возможная ошибка может составить 0,018 — 0,012, или 1% — 2%

5.

Большая полуось орбиты визуальной двойной звезды наблюдается с Земли под углом 0.628", период обращения равен 60,55 годам. Считая параллакс равным 0.0284", определите суммарную массу двойной системы в массах Солнца.

Решение:

Параллакс - угол, под которым из окрестности двойной звезды (расстояние до которой d) видна большая полуось орбиты Земли а вокруг Солнца: $\pi['']={}^{1}\!/_{d[\text{пк}]}$. Соответственно: $d[\text{пк}] = {}^{1}\!/_{\pi['']} \sim 35$ пк. Связь большой полуоси в линейной и угловой мере: $a[''] = {}^{a[\text{а. е.}]}\!/_{d[\text{пк}]}$, отсюда$a = a['']d[\text{пк}] \sim 22$ а.е. Искомая суммарная масса двойной системы определяется через 3-й закон Кеплера: $M = \frac{a^3}{T^2} = 2{,}95$ масс Солнца.

6.

Зная, что средний размер белого карлика равен примерно диаметру Земли, а температура составляет 13000K. Оцените, какова светимость белого карлика в светимостях Солнца? С какого расстояния мы не сможем увидеть такой белый карлик без телескопа?

Решение:

Светимость звезды $L = 4\pi R^2\sigma T^4$Сравним отношение светимостей белого карлика и Солнца. $\frac{L_{wd}}{L_{sun}} = \frac{4\pi R_{wd}^2\sigma T_{wd}^4}{4\pi R_{sun}^2\sigma T_{sun}^4} = \left(\frac{R_{wd}}{R_{sun}}\right)^2\left(\frac{T_{wd}}{T_{sun}}\right)^4$, зная что температура фотосферы Солнца 5800K, радиус Солнца 690000 км, радиус Земли 6400 км. $\frac{L_{wd}}{L_{sun}} = \left(\frac{R_{wd}}{R_{sun}}\right)^2\left(\frac{T_{wd}}{T_{sun}}\right)^4 = \left(\frac{6400}{690000}\right)^2\left(\frac{13000}{5800}\right)^4 = (0.009)^2(2.24)^4 = 0.002$. Теперь посмотрим, с какого расстояния можно увидеть его невооруженным глазом. Если таким белым карликом заменить Солнце, то его бы яркость была в 500 раз меньше, что соответствует 5*100 раз, т.е. на 1.7+5=6.7 звездных величин меньше Солнца с Земли. Далее вспоминаем, что звездная величина Солнца с Земли - -26.7, т.е. у белого карлика с расстояния в 1 а.е. будет -20 звездная величина. Вспомним, что освещенность создаваемая звездой обратно пропорциональна квадрату расстояния. Сравним такую освещенность для белого карлика с расстояния в 1 а.е. и с того расстояния, где белый карлик будет иметь звездную величину в 6.5 предельную для человеческого глаза.$\frac{E_1}{E_x} = 10^{0.4(m_x-m_1)}, \left(\frac{R_x}{R_1}\right)^2 = 10^{0.4(m_x-m_1)}, \frac{R_x}{R_1} = 10^{0.2(6.5-(-20))} = 10^{5.3} \approx$
$200000\text{а. е, чтосоответсвует} \cong 1\text{пк}.$

Длинная задача №7

Зеркало на Луне

На Луне наблюдаются т.н. кратковременные лунные явления (КЛЯ): вспышки, потемнения, изменения цвета и т.п.. Предположим, что одним из объяснений для некоторых из КЛЯ может быть наличие на Луне участка зеркальной поверхности (например, остекленевшего реголита или забытого американскими астронавтами куска блестящей пленки). КЛЯ возникает, когда отраженный луч Солнца попадает в наблюдателя.

1. *При каком размере плоского зеркала, находящегося на поверхности Луны, направленный на наблюдателя солнечный зайчик можно заметить а) в крупный телескоп, б) невооруженным глазом?*

Если размер зеркала существенно меньше размера Луны, наблюдатель заметит отражение небольшого кусочка поверхности Солнца. Поверхностная яркость изображения совпадает с яркостью Солнца. Поэтому поток излучения от зеркала пропорционален площади зеркала. Его легко можно оценить, учтя равенство видимых угловых размеров Луны и Солнца. Получаем:

$$m_m \approx m_\odot + 5 \lg \frac{D}{d},$$

где $m_\odot = -26.9$ — видимая звездная величина Солнца, $D \approx 3500$ км — диаметр Луны, d — "диаметр" зеркала. Т.е. для зеркала размером 35 м $m_m \sim -2$, для 3.5 км $m_m \sim -12$.

Однако, будет ли такой объект заметен на фоне поверхности луны? (Явление, естественно,возможно только на освещенной части Луны.) Для сопоставления учтем, что из-за атмосферной турбулентности на Луне в телескоп трудно различить детали размером менее 1 км (эту оценку можно получить, приняв угловое разрешение равным $0.5 - 1''$). Очевидно, если зеркало превышает этот размер, оно будет заметно на поверхности Луны: яркость поверхности зеркала равна яркости Солнца, т.е. примерно в $5 \cdot 10^5$ раз ярче окружающей поверхности. Оценка яркости поверхности Луны получается, если принять видимою звездную величину полной Луны $m_c = -12.7$.

Сравним поток излучения F_m от "пикселя" на поверхности Луны, содержащего зеркало размером $d < d_{\rm pix} = 1$ км с потоком F_0 от пикселя, не содержащего зеркало. Для простоты пусть лунное альбедо всюду одинаково. Тогда

$$\delta = \frac{F_m}{F_0} = 1 + 5 \cdot 10^5 \frac{d^2}{d_{\rm pix}^2}.$$

Пиксель с зеркалом становится заметен примерно когда $\delta \sim 2$, т.е.

$$d = \frac{d_{\rm pix}}{\sqrt{5 \cdot 10^5}} \approx 1.4 \cdot 10^{-3} d_{\rm pix}.$$

Таким образом, для телескопа получаем $d_{\text{телескоп}} \approx 1$м. Для глаза размер "пикселя" это 1 угловая минута или 1/30 диаметра Луны и минимальный размер зеркала $d_{\text{глаз}} \approx 200$м. (Заметим, что проведенная оценка являются грубой и поэтому результаты округлены до одной значащей цифры.) Для большей надежности можно принять $\delta \sim 10$, при этом размеры зеркала увеличатся в 3 раза.

Зеркало не обязательно является плоским. Как изменится предыдущий результат, если радиус его кривизны равен радиусу Луны (зеркало выпуклое)?

Если зеркало выпуклое, в наблюдателя с противоположных краев зеркала попадают лучи, идущие под углом

$$\alpha = \frac{4d}{D}$$

друг к другу. Яркость зеркала будет совпадать с яркостью Солнца, если этот угол меньше видимого углового размера Солнца, $\alpha < 0,5^\circ$ или $d < 7.6$км. Т.е. при $d <$ 7.6км результат не изменится, при бóльших размерах зеркала приведенные выше оценки потока от зеркала применять нельзя.

2. *Какова (приблизительно) максимальная длительность такого явления для наблюдателя, находящегося на поверхности Земли?*

Если бы Солнце было неподвижно на земном небе, то максимальная длительность равнялась бы времени, в течении которого Луна на небе проходит относительно Солнца путь равный видимому угловому диаметру Солнца.

$$t_1 = \frac{0.5^\circ T}{360^\circ},$$

$T = 29.53^d$ — синодический период Луны. Получаем $t_1 \approx 1^h$.

Скорость вращения Земли вокруг собственной оси вносит коррективы в эту оценку, поскольку размер солнечного зайчика на Земле примерно равен диаметру Луны, около 3500 км, и время за которое точка на земном экваторе провернется на это расстояние примерно равно $t_2 = 2^h$. Поскольку Луна вращается в ту же сторону, что и Земля, максимальная длительность наблюдения увеличивается:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}, \qquad t = 2^h.$$

3. *Из какой области на Луне может наблюдатся солнечный зайчик, если зеркало расположено горизонтально?*

Это полоса вдоль экватора. Ширина определяется наклоном лунной орбиты к эклиптике (5°), наклоном лунного экватора к эклиптике (1.5°), угловым размером Земли (1°), видимой с Луны. Суммарная ширина полосы 7.5°.

Литература

1. Физика и астрономия Луны, под ред. З. Копала, М.: “Мир”, 1973.
2. Луна и ее наблюдение, В.В. Шевченко, М.: “Наука”, 1983.

Практические задачи.

8.

Вам дан снимок метеора. Известно, что траектория метеора лежит в картинной плоскости. Расстояние до средней точки траектории (оно же наименьшее) равно 250 км. Считая, что длительность метеора 1 секунда, оцените среднюю скорость объекта на этом участке пути.

<u>Решение:</u>

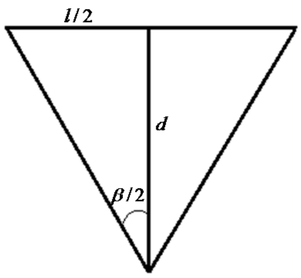
По приложенной карте звездного неба можно определить угловое расстояние между звездами ν и μ Андромеды. Расстояние между этими звездами мало, поэтому можно с хорошей точностью воспользоваться обычной теоремой Пифагора:

$\varphi = \sqrt{(\Delta\alpha \cdot cos\delta)^2 + (\Delta\delta)^2} \approx 3°$, где $\Delta\alpha$ - разница прямых восхождений звезд, δ – склонение звезды μ, $\Delta\delta$ - разница склонений двух звезд.

Сравнив по фотографии расстояния, измеренные линейкой, между этими звездами и началом и концом следа метеора, можно получить следующую пропорцию:

$\frac{S_з}{S_м} = \frac{\varphi}{\beta}$,где $S_з$ и $S_м$ – измеренные линейкой расстояния между звездами и началом и концом следа соответственно. Из пропорции получаем, что угловые размеры следа примерно $\beta = 12°40'$.

Очевидно, что точка наблюдения и точки конца и начала траектории образуют равносторонний треугольник. Схематически изобразим его и обозначим на нем нужные нам величины.



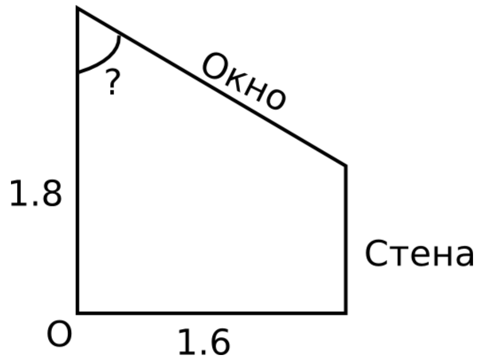
Тогда, решая этот треугольник, получаем, что длина траектории равна:

$l = 2d \cdot tg\frac{\beta}{2} \approx 55{,}2$км, тогда средняя скорость на этом отрезке пути равна

$$V = 55{,}2\ \text{км/сек}$$

9.

Астроном лежит на чердаке под наклонным окном. Прямо над головой, рядом с границей окна сияет Мирфак (α Персея). На противоположной границе окна виден Кохаб (β Малой Медведицы). Определите широту и наклон окна. Окно направлено на север.



Решение:

Склонение звёзд, наблюдаемых в зените равно широте местности, поэтому сразу можно сказать, что широта наблюдателя равна склонению Мирфака и составляет 50˚. Его можно было определить с помощью прилагаемой карты неба. Также с помощью карты можно определить, что прямое восхождение Кохаба и Мирфака отличается на 11,5 часов. Это означает, что когда Мирфак проходит верхнюю кульминацию (находясь в зените), Кохаб в это время находится вблизи нижней кульминации на севере, куда и направлено окно. Высота звезды в нижней кульминации равна $h=\varphi-90^\circ+\delta^\circ=50-90+74=34^\circ$. Далее задача сводится к решению треугольников. Высота более низкой стены равна $1.6\cdot\tan 34^\circ \sim 1{,}08$ метра. Соответственно, высота окна равна 1,8-1,08=0,72 метра. Искомый угол равен $arctg\ \frac{1{,}6}{0{,}72}=66^\circ$.