LXXVII Московская математическая олимпиада

2 марта 2014 года • 11 класс, первый день

Задача 1. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках c и $\frac{1}{a}$ значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена $f(x)$ имеют разные знаки.

Задача 2. Найдите все значения a, для которых найдутся такие x, y и z, что числа $\cos x$, $\cos y$ и $\cos z$ попарно различны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию, при этом числа $\cos(x+a)$, $\cos(y+a)$ и $\cos(z+a)$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию.

Задача 3. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ с центром O отмечены такие точки P и Q соответственно, что $\angle AOP = \angle COQ = \angle ABC$.

а) Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

б) Докажите, что прямые AQ и CP пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

Задача 4. Саша обнаружил, что на калькуляторе осталось ровно n рабочих кнопок с цифрами. Оказалось, что любое натуральное число от 1 до 99 999 999 можно либо набрать, используя лишь рабочие цифры, либо получить как сумму двух натуральных чисел, каждое из которых можно набрать, используя лишь рабочие цифры. Каково наименьшее n, при котором это возможно?

Задача 5. Многочлен $P(x)$ обладает следующими свойствами: $P(0) = 1$, $(P(x))^2 = 1 + x + x^{100}Q(x)$ при всех действительных x, где $Q(x)$ — некоторый многочлен. Докажите, что коэффициент при x^{99} многочлена $(P(x) + 1)^{100}$ равен нулю.

Задача 6. В королевстве некоторые пары городов соединены железной дорогой. У короля есть полный список, в котором поимённо перечислены все такие пары (каждый город имеет своё собственное имя). Оказалось, что для любой упорядоченной пары городов принц может переименовать все города так, чтобы первый город оказался названным именем второго города, а король не заметил бы изменений. Верно ли, что для любой пары городов принц может переименовать все города так, чтобы первый город оказался названным именем второго города, второй город оказался названным именем первого города, а король не заметил бы изменений?

Решение каждого пункта задачи 3 оценивается как решение отдельной задачи.

Закрытие LXXVII Московской математической олимпиады
пройдёт в воскресенье 23 марта в Главном здании МГУ.
Подробная информация на сайте `www.mccme.ru/mmo/`