LXXIII Московская математическая олимпиада

10 класс 14.03.2010

Задача № 1. Известно, что сумма любых двух из трёх квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$, $x^2 + ex + f$ не имеет корней. Может ли сумма всех этих трёхчленов иметь корни?

Задача № 2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$. Точки M и N лежат на сторонах AB и CD соответственно, причём отрезок MN параллелен основаниям трапеции. Диагональ AC пересекает этот отрезок в точке O. Найдите MN, если известно, что площади треугольников AMO и CNO равны.

Задача № 3. Можно ли, применяя к числу $\mathbf{2}$ функции $\mathbf{sin}$, $\mathbf{cos}$, $\mathbf{tg}$, $\mathbf{ctg}$, $\mathbf{arcsin}$, $\mathbf{arccos}$, $\mathbf{arctg}$, $\mathbf{arcctg}$ в любом количестве и в любом порядке, получить число $\mathbf{2010}$?

Задача № 4. Сумма цифр числа n равна 100. Может ли сумма цифр числа n^3 равняться 100^3?

Задача № 5. В неравнобедренном треугольнике две медианы равны двум высотам. Найдите отношение третьей медианы к третьей высоте.

Задача № 6. На плоскости отметили $4n$ точек, после чего соединили отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно 1 см. Оказалось, что среди любых $n + 1$ точек обязательно есть две, соединённые отрезком. Докажите, что всего проведено не менее $7n$ отрезков.
