МОСКОВСКАЯ ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ЭКОНОМИКЕ
для 11 классов

28марта 2010г.

ОТВЕТЫ
2- й тур
ЗАДАЧИ

6 задач - 90 баллов
Время - 150 минут

Код участника

Таблица заполняется жюри! Никаких пометок быть не должно!!!

Задача №	1	2	3	4	5	6	Итого
Кол-во баллов							

Задача 1. (18 баллов)
Технология производства необыкновенно вкусных и полезных витаминок «Экономист» описывается следующими соотношениями объема выпуска и затрачиваемых факторов производства:

$K = Q^3 + 10Q$

$L = 2Q^3 + Q^2 + Q$

Для производства монополисту требуются только труд и капитал Стоимость капитала на конкурентном рынке составляет 2. Также монополист платит рабочим заработную плату в размере W, всем одинаковую, так как и их он нанимает на совершенно конкурентном рынке труда. Спрос на продукцию монополии имеет вид $Q = 124 - P$.

Определите:
а) Уравнение общих издержек фирмы;
б) Оптимальный объем выпуска при W=4;
в) При каких значениях заработной платы монополист будет выпускать на рынок свой вкусный и полезный товар.

Решение:

а) $TC(Q) = 2K(Q) + WL(Q) = 2(Q^3 + 10Q) + W(2Q^3 + Q^2 + Q)$.

$TC(Q) = 2(Q^3 + 10Q) + 4(2Q^3 + Q^2 + Q) = 10Q^3 + 4Q^2 + 24Q$

$MC(Q) = 30Q^2 + 8Q + 24 = MR = 124 - 2Q$

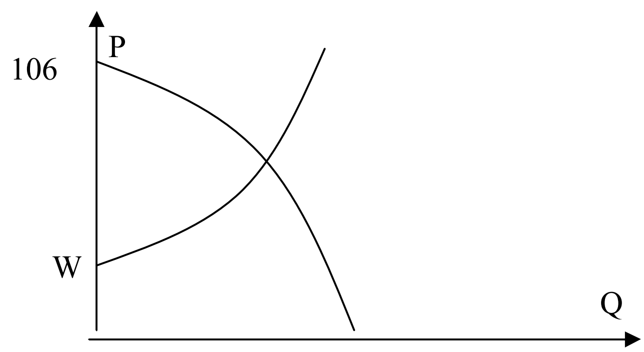
б) $30Q^2 + 10Q - 100 = 0$ $\qquad 3Q^2 + Q - 10 = 0$

$D = 1 + 120 = 121$ $\qquad Q1 = \frac{5}{3}$ $\qquad Q2 = -2$

Q=5/3

в)После подсчета MC получаем:
$$MC = 2(3Q^2 + 10) + W(6Q^2 + 2Q + 1) = 6Q^2 + 20 + W(6Q^2 + 2Q + 1)$$
$$6Q^2 + 20 + W(6Q^2 + 2Q + 1) = 126 - 2Q$$
$$106 - 2Q - 6Q^2 = W(6Q^2 + 2Q + 1)$$
Требуется найти, при каком значении параметра W, фирме будет выгодно осуществлять положительный выпуск. Обратимся к графикам соответствующих функций: в левой части уравнения – убывающая ветвь параболы, справа – возрастающая. Правая часть уравнения при Q=0 всегда будет равна W. Каким бы ни было W, одно пересечение всегда будет до тех пор, пока W не поднимется до уровня Wmax=106. Таким образом, мы всегда будем что-то производить, пока $W < 106$.

Замечание: последний пункт непросто решить аналитически, так как нужно подобрать необходимые и достаточные условия, чтобы квадратное уравнение имело 1 положительный корень.



Задача 2. (18 баллов)

Король Треуголии Филипп I Тупой решил реформировать рынок «замечательных точек». Он призвал себе на помощь Юного Экономиста и произнёс такую речь:

– Долой совершенную конкуренцию! Я объединю всех производителей в одну большую монополию. Сначала я установлю такой объём, чтобы максимизировать выручку: пусть все поразятся тому, сколько денег я могу собрать с этого рынка! Первое задание – посчитать, на сколько процентов изменится объём выпуска по сравнению с конкурентным. Потом я установлю такой объём, чтобы максимизировать прибыль: пусть все восхитятся тем, какой я мудрый и рациональный правитель! Второе задание – посчитать, на сколько процентов изменится объём выпуска по сравнению с максимизирующим выручку.

После этих слов Король передал Юному Экономисту листок бумаги, на котором был изображён линейный спрос и линейное предложение, выходящее из начала координат – это всё, что осталось от Старого Экономиста, казнённого за то, что постоянно менял местами оси цены и количества и никогда не подписывал их на графике.

– Допустим, это ось P, – предположил Юный Экономист и нарисовал график MR...

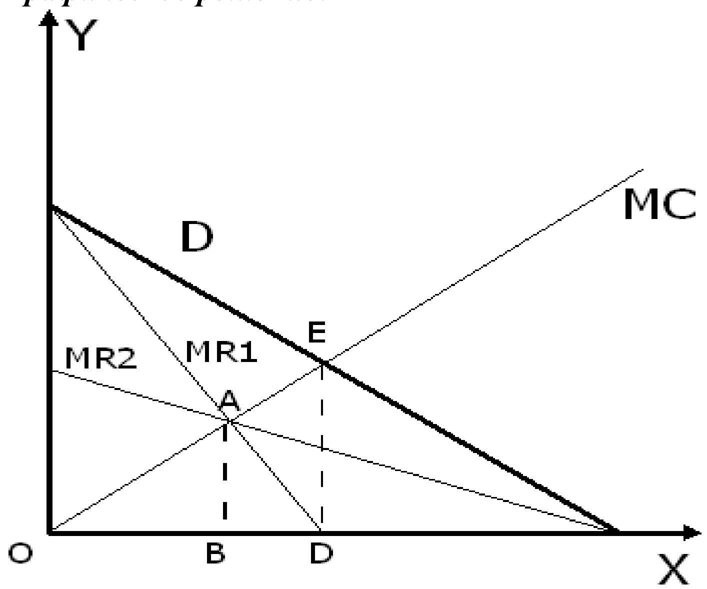
– А если наоборот... – задумался он, и нарисовал еще один график MR. Он так и не выяснил, какой из них действительно является графиком MR, а лишь заметил, что они пересекают кривую предложения в одной и той же точке. Дальше этого анализ Юного экономиста не продвинулся.

Помогите ему выполнить задание Короля! Ведь сами понимаете: одна ошибка – и голова с плеч!

Решение:

Для данной задачи можно предложить 2 варианта решения – графическое и аналитическое. Первое проще, но до него вряд ли смогут додуматься многие. Второе – «в лоб», при этом оно не громоздкое.

Графическое решение:



Зная, что MR для линейной кривой спроса – это медиана треугольника, ограниченного осями и кривой спроса, назовем его треугольником ABC

Тогда прямая MC – это тоже медиана, т.к. она проходит через начало координат и точку пересечения медиан, поэтому делит кривую спроса пополам. Следовательно, максимальная выручка будет достигаться в точке, где MC пересекает спрос, т.е. как раз в той точке, где устанавливается конкурентная цена. Т.о. $\max TR = TR_{competitive}$. Конкурентное количество обеспечивает максимальную выручку на этом рынке, следовательно ответ на первый вопрос короля 0%.

Мы знаем уже, что MC – это медиана ABC. Пусть ось X – количество.

Треугольники OAB и OED подобны по 2-м углам. Значит,

$$\frac{OA}{OE}=\frac{OB}{OD}$$

$\frac{OA}{OE}=\frac{2}{3}$ по свойству точки пересечения медиан (она делит медиану в отношении 2:1 считая от вершины)

$Q_m = OB$, $Q_{comp} = OD$, следовательно, $Q_m = \frac{2}{3} Q_{comp}$, следовательно, для достижения максимальной прибыли необходимо сократить выпуск на $33\frac{1}{3}\%$.

Ответы: 0%, -33,(3)%.

Аналитическое решение:

Кривая спроса: y=a-bx, причем он не знает, что из x и y количество, а что – цена.

Кривая MC: y=kx

Найдем MR в предположении, что x – количество и назовем это MR_1:

TR=(a-bx)x

$$MR_1 = TR'_X = a-2bx$$

Найдем MR в предположении, что y – количество и назовем это MR_2:

$$TR = y\frac{a-y}{b}$$

$$MR_2 = TR'_Y = \frac{a-2y}{b}$$

Известно, что эти кривые пересекаются в 1-й точке. Решим систему:

$$\begin{cases} y = a-2bx \\ x = \dfrac{a-2y}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a-2b\dfrac{a-2y}{b} = a-2a+4y \\ x = \dfrac{a-2y}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{a}{3} \\ x = \dfrac{a}{3b} \end{cases}$$

Более того, известно, что кривая MC проходит через эту точку, т.е.

$$\frac{a}{3} = k\frac{a}{3b} \Leftrightarrow k = b$$

Найдем точку пересечения MC и кривой спроса:

$$\begin{cases} y = bx \\ y = a-bx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_c = \dfrac{a}{2} \\ x_c = \dfrac{a}{2b} \end{cases}$$

Эти условия соответствуют условиям максимизации TR => $\max TR = TR_{competitive}$

Теперь рассмотрим максимизацию прибыли.

Возможны 2 варианта относительно того, что является количеством, а что – ценой.

Вариант 1й:

x – количество, тогда монопольное количество будет в точке, где MC пересекает MR. Мы уже нашли это количество ранее $x = \frac{a}{3b}$. Следовательно,

$$\begin{cases} x_{mon} = \dfrac{a}{3b} \\ x_c = \dfrac{a}{2b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{mon} = \dfrac{a}{3b} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{a}{2b} = \dfrac{2}{3} x_c \\ x_c = \dfrac{a}{2b} \end{cases}$$

Вариант 2й:

у количество, тогда:

$$\begin{cases} y_{mon} = \dfrac{a}{3} \\ y_c = \dfrac{a}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{mon} = \dfrac{a}{3b} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{a}{2} = \dfrac{2}{3} y_c \\ y_c = \dfrac{a}{2b} \end{cases}$$

В обоих вариантах мы получаем одинаковый **ответ,** $Q_{mon} = \dfrac{2}{3} Q_{comp}$

Задача 3. (15 баллов)

Закрытие крупнейшего предприятия страны привело к единовременному увольнению N работников, что привело к увеличению уровня безработицы на 3 процентных пункта. Спустя некоторое время половина из уволенных устроилась на работу, четверть отчаялась найти работу и прекратила поиски, четверть осталась в рядах безработных. За это же время на рынке труда появилось N/2 новых работников, половина из которых сразу нашла работу, а остальные вошли в состав безработных. Определите, не меньше какого уровня был уровень безработицы до закрытия предприятия, если в итоге всех указанных событий он сократился.

Решение.

$$\frac{U+N}{U+E}-\frac{U}{U+E}=0,03 \qquad \frac{N}{U+E}=0,03 \qquad N=0,03(U+E)$$

$$\frac{U+\frac{N}{4}+\frac{N}{4}}{U+E-\frac{N}{4}+\frac{N}{2}}=\frac{U+\frac{0,03(U+E)}{2}}{U+E+\frac{0,03(U+E)}{4}}=\frac{U}{(U+E)*\left(1+\frac{0,03}{4}\right)}+\frac{\frac{0,03}{2}}{\left(1+\frac{0,03}{4}\right)}$$

$$\frac{U}{(U+E)*\frac{403}{400}}+\frac{\frac{3}{200}}{\frac{403}{400}}-\frac{U}{U+E}=-\frac{3}{403}*\frac{U}{U+E}+\frac{6}{403}$$

Ответ: не менее 2%

Задача 4. (10 баллов)

Две хозяйки (Маша и Даша) и один хозяин (Миша) готовили на общей печке обед. Продукты были общими, а вот дрова каждый должен был обеспечить отдельно. Маша принесла три полена, Даша - пять таких же поленьев, а Миша, согласно ранее достигнутой договоренности, отдал им восемь рублей. Маша и Даша сочли это равным вкладом в общее дело. Как разделить “по справедливости” между Машей и Дашей эти восемь рублей, если дрова прогорели полностью? Объясните почему?

Решение:

1) Для начала ответим на простой вопрос: «За что платил Миша»? За тепло, за огонь.
2) Сколько он заплатил? Поскольку Маша и Даша сочли это достойным вкладом в общее дело, эквивалентным половине их общего вклада, то ясно, что он заплатил третью часть от всех затрат.
3) Поэтому приготовление обедов стоило 8*3 = 24 рубля.
4) Всего было затрачено 8 поленьев (3 +5). Следовательно, одно полено стоит 3 рубля (24 : 8 = 3).
5) Каждая хозяйка (и Маша, и Даша) взяли «из общего котла» по одной трети тепла или огня (как вам угодно называть эту услугу). Одна треть «общего котла» оценивается в 8 руб.
6) Маша внесла «в общий котел» 3 полена, что эквивалентно 33 = 9 рублей, а Даша 15 рублей (53 = 15).
7) Значит, Маше надо компенсировать перерасход: 9 – 8 = 1 рубль.
8) Даше надо обеспечить баланс: 15 – 8 = 7 рублей.

<u>Ответ:</u> Маше 1 рубль, а Даше 7 рублей.

Задача 5. (14 баллов)

Пять экономистов решили рассчитать среднегодовой темп инфляции за последние 10 лет. Каждый из них имел свое представление о том, какой из индексов цен лучше измеряет инфляцию, и в итоге все выбрали разные способы расчета.

- Экономист П. Ааше оценивал инфляцию за каждый год с помощью индекса Пааше;
- Экономист Л. Аспейрес оценивал инфляцию за каждый год с помощью индекса Ласпейреса;
- Экономист П. Аспейрес оценивал инфляцию за каждый четный год с помощью индекса Пааше, а за каждый нечетный – с помощью индекса Ласпейреса;
- Экономист Л. Ааше, напротив, оценивал инфляцию за каждый четный год с помощью индекса Ласпейреса, а за каждый нечетный – с помощью индекса Пааше;
- Наконец, малоизвестный экономист Ф. Ишер оценивал инфляцию за каждый год с помощью индекса Фишера.

Неудивительно, что и результаты у всех получились разные. П. Ааше оценил среднегодовой темп инфляции на уровне 50%, Л. Ааше – на уровне 20%, а П. Аспейрес – на уровне 25%. Каковы оценки, полученные Л. Аспейресом и Ф. Ишером?

Решение:

Обозначим индекс Пааше за k-тый год I_P^k, индекс Ласпейреса – I_L^k, индекс Фишера – I_F^k. Тогда

$$\begin{cases} \sqrt[10]{I_P^1 I_P^2 \ldots I_P^{10}} = 1,5 \\ \sqrt[10]{I_P^1 I_L^2 I_P^3 \ldots I_L^{10}} = 1,2 \\ \sqrt[10]{I_L^1 I_P^2 I_L^3 \ldots I_P^{10}} = 1,25 \end{cases}$$

Перемножив второе и третье уравнение, получаем, что

$$\sqrt[10]{I_P^1 I_L^1 I_P^2 I_L^2 \ldots I_P^{10} I_L^{10}} = 1,2 \cdot 1,25 = 1,5 . \qquad (0)$$

Теперь, деля (1) на первое уравнение системы, сразу находим оценку Л. Аспейреса:

$$\sqrt[10]{I_L^1 I_L^2 \ldots I_L^{10}} = 1,5 / 1,5 = 1 .$$

Далее, вспомнив, что $\left(I_F^k\right)^2 = I_P^k I_L^k$, преобразуем (1) к виду

$$\left(\sqrt[10]{I_F^1 I_F^2 \ldots I_F^{10}}\right)^2 = 1,5 .$$

Значит, оценка Ф. Ишера равна $\sqrt{1,5} \approx 1,2247$.

Ответ: искомые оценки равны 0% и 22,47%.

Задача 6. (15 баллов)

Али-Баба решил организовать отряд из L разбойников для похода за сокровищами. Хотя поиск сокровищ полон неожиданностей, Али-Баба знает по опыту, что слишком маленький, равно как и слишком большой отряд будет неэффективен в этом рискованном деле, и поэтому зависимость объема добытых сокровищ от количества разбойников имеет примерный вид $Q = 100L - L^2$ (Q измеряется в динариях). По оценкам компании «Сезам», предлагающей все необходимое для таких походов, величина фиксированных издержек, связанных с поиском сокровищ, составит 1560 динариев. Согласно Разбойничему Уставу, эти издержки, равно как и добыча, будут распределены между всеми участниками похода, причем разбойники получат добычи и заплатят издержек поровну, а Али-Баба, как организатор, получит (и заплатит) вдвое больше, чем каждый из разбойников.

а) Считая, что другие издержки отсутствуют, определите оптимальное для Али-Бабы значение L.

б) Какое значение L оптимально с точки зрения отдельно взятого разбойника? Возникнут ли у Али-Бабы и разбойников разногласия по поводу размера отряда?

Решение:

Чистая добыча отряда составит $\pi(L) = 100L - L^2 - 1560$ динариев. В итоге она будет разделена на $L+2$ части, 2 из которых получит Али-Баба, а L – разбойники, по одной части каждый. Значит, чистая добыча Али-Бабы составит

$$\pi_{Ali-Baba}(L) = \frac{2}{L+2}\left(100L - L^2 - 1560\right).$$

Максимизируя ее, он приравняет соответствующую производную к нулю:

$$\pi'(L) = 0$$

$$2\frac{(100-2L)(L+2)-(100L-L^2-1560)}{(L+2)^2} = 0$$

$$L^2 + 4L - 1760 = 0$$

$$L^* = 40$$

Как и следовало ожидать, оптимальным для Али-Бабы является размер отряда, равный 40 разбойникам.

Чистая добыча каждого разбойника при любом L будет вдвое меньше, чем добыча Али-Бабы, то есть $\pi_{robber}(L) = 0,5\pi_{Ali-Baba}(L)$. Значит, $\pi'_{robber}(L) = 0,5\pi'_{Ali-Baba}(L)$, и поэтому максимум добычи каждого разбойника достигается при том же значении L, что и максимум добычи Али-Бабы, то есть при $L = 40$. Разногласий по поводу размера отряда между Али-Бабой и разбойниками не будет.

Ответ: а) 40 разбойников; б) также 40 разбойников. Разногласий не будет.